Prof. Dr. Thomas Sørensen
R. Coelho

PROBESTUDIUM
ÜBUNGSBLATT 1 (LÖSUNGEN)

2.-6. September 2019
02.09.2019

**Aufgabe 1.**

(i) Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ ist die Behauptung wahr: $1^3 + 5 \times 1 = 6$.

Induktionsschritt (IS): Wir nehmen die *Indutuktionsvoraussetzung* (IV)

$$\text{"}n^3 + 5n \text{ ist durch 6 teilbar"}$$

an, und beweisen damit die Behauptung

$$\text{"}(n+1)^3 + 5(n+1) \text{ ist durch 6 teilbar".}$$

Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + 5(n+1) =& (n+1)^2(n+1) + 5n + 5 && (1)\\
=& (n^2 + 2n + 1)(n+1) + 5n + 5 && (2)\\
=& (n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1) + 5n + 5 && (3)\\
=& n^3 + 3n^2 + 3n + 5n + 6 && (4)\\
=& n^3 + 5n + 3(n+1)n + 6. && (5)
\end{aligned}$$

Nach der IV, ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar. Da $(n+1)n$ gerade, ist $3(n+1)n$ durch 6 teilbar. Es folgt, $(n+1)^3 + 5(n+1)$ ist die Summe von Zahlen, die sich durch 6 teilen lassen. Deshalb ist sie selbst durch 6 teilbar.

(ii) Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ ist die Behauptung wahr: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = (2-1) = 1 = 1^2$.

Induktionsschritt (IS): Wir nehmen die Indutuktionsvoraussetzung

$$\text{"}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2\text{"}$$

an, und beweisen damit die Behauptung

$$\text{"}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2\text{"}$$

Wir rechnen

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right) + 2(n+1) - 1 \quad \text{(nach Definition von "}\textstyle\sum\text{").} \tag{6}$$
$$= n^2 + 2(n+1) - 1 \quad \text{(nach der IV)} \tag{7}$$
$$= n^2 + 2n + 1 \tag{8}$$
$$= (n+1)^2. \tag{9}$$

- (iii) IA: Für $n = 0$ ist die Behauptung wahr: $\sum_{k=0}^{0} q^0 = 1$ (da $q \neq 0$) und $1 = \frac{1-q}{1-q}$ (da $q \neq 1$).

  IS:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} \quad \text{(nach der Definition von "}\textstyle\sum\text{"} \tag{10}$$
$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^n + 1 \quad \text{(nach der IV)} \tag{11}$$
$$= \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} \tag{12}$$
$$= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} \tag{13}$$
$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \tag{14}$$
$$= \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}. \tag{15}$$

**Aufgabe 2.** "$\sum$" ist induktiv definiert. Wir beweisen die Rechenregeln mit Induktion.

(1) IA: Für $n = 0$ gilt $a \cdot \sum_{k=0}^{0} a_k = a \cdot a_0 = \sum_{k=0}^{0} a \cdot a_k$.

IS: Ist $a \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a \cdot a_k$ (IV), gilt

$$a \cdot \sum_{k=0}^{n+1} a_k = a \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a \cdot a_{n+1} \quad \text{(Def. von "}\textstyle\sum\text{")} \tag{16}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a \cdot a_k\right) + a \cdot a_{n+1} \quad \text{(IV)} \tag{17}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} a \cdot a_k \quad \text{(Def. von "}\textstyle\sum\text{").} \tag{18}$$

(2) IA: Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} a_k + \sum_{k=0}^{0} b_k = a_0 + b_0 = \sum_{k=0}^{0}(a_k + b_k)$.

IS: Ist $(\sum_{k=0}^{n} a_k) + (\sum_{k=0}^{n} b_k) = (\sum_{k=0}^{n} a_k + b_k)$ (IV), gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n+1} b_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) + b_{n+1} \tag{19}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k + b_k\right) + (a_{n+1} + b_{n+1}) \quad \text{(IV)} \tag{20}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k + b_k\right). \tag{21}$$

(3) IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{1} a_k = a_0 + a_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{1} a_k$.
IS: Ist $(\sum_{k=0}^{n} a_k) = a_0 + (\sum_{k=1}^{n} a_k)$ (IV), gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \tag{22}$$
$$= a_0 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \quad \text{(IV)} \tag{23}$$
$$= a_0 + \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right). \tag{24}$$

**Aufgabe 3.**

(5) Fallunterscheidung: ist $x \geq 0$, gilt

$$|x| = x \text{ und } |-x| = x.$$

Es folgt, $|x| = x = |-x|$.
Ist $x < 0$, gilt

$$|x| = -x \text{ und } |-x| = -x.$$

Es folgt, $|x| = -x = |-x|$.

(6) Fallunterscheidung: ist $x \geq 0$ und $y \geq 0$, gilt

$$|x| = x, |y| = y \text{ und } |x \cdot y| = x \cdot y \quad \text{(denn auch } x \cdot y \geq 0).$$

Es folgt, $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$.
Ist $x < 0$ und $y \geq 0$, gilt

$$|x| = -x, |y| = y \text{ und } |x \cdot y| = -x \cdot y \quad \text{(denn } x \cdot y \leq 0).$$

Es folgt, $|x \cdot y| = -x \cdot y = |x| \cdot |y|$.
Ist $x \geq 0$ und $y < 0$, vertauschen wir die Rollen von $x$ und $y$ im oberen Beweis.
Ist $x < 0$ und $y < 0$, gilt

$$|x| = -x, |y| = -y \text{ und } |x \cdot y| = x \cdot y \quad \text{(denn auch } x < 0 \text{ und } y < 0).$$

Es folgt, $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$.

(7) Wir setzen $y$ zu $-y$ in (8) ein:

$$|x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y| \quad \text{(nach (5))}$$

(8) Wie (5) und (6).

**Aufgabe 4.**

(i) IA: Für $n = 0$ ist die Behauptung wahr: $\sum_{k=0}^{n} k^0 = 0^2$.

IS: Ist $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (IV), gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 && (25)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{(IV)} && (26)\\
&= (n+1)\left(\frac{(2n+1)n}{6} + n + 1\right) && (27)\\
&= (n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right) && (28)\\
&= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}. && (29)
\end{aligned}
$$

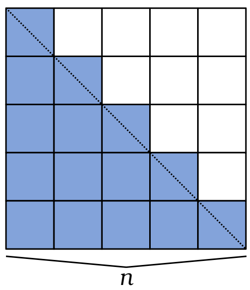
Jetzt prüfen wir, dass $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$ gilt:

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6.$$

Es folgt,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} && (30)\\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}. && (31)
\end{aligned}
$$

(ii) Um die Formel für die Summe $\sum_{k=0}^{n} k$ zu erraten, können wir uns die Summe als Flächeninhalt des schattierten Bereichs in der folgenden Abbildung vorstellen:




Der Flächeninhalt des Teils unter der Diagonale ist $n^2/2$. Fürs obere Teil ist der Flächeninhalt $n/2$. Deshalb vermutet man

$$\sum_{k=0}^{n} k =^? \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

was dann induktiv bewiesen werden kann (siehe Vorlesung).

Für die Summe $\sum_{k=0}^{n} k^2$ könnten wir uns das Gleiche in drei Dimensionen vorstellen. Auch wenn eine genaue Berechnung des Volumens des entsprechenden Bereich kompliziert wird, können wir dennoch davon ausgehen, dass die Lösung ein Polynom von Grad 3 sein wird. Wir schreiben also den *Ansatz*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 =^? a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0.$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, können wir manche Werte der Summe berechnen:

$$\begin{aligned}
n=0: &\quad \sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 \text{ und } a_3\cdot 0^3 + a_2\cdot 0^2 + a_1\cdot 0 + a_0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0 \\
n=1: &\quad \sum_{k=0}^{1} k^2 = 1 \text{ und } a_3\cdot 1^3 + a_2\cdot 1^2 + a_1\cdot 1 = a_3 + a_2 + a_1 \\
n=2: &\quad \sum_{k=0}^{2} k^2 = 5 \text{ und } a_3\cdot 2^3 + a_2\cdot 2^2 + a_1\cdot 2 = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 \\
n=3: &\quad \sum_{k=0}^{3} k^2 = 14 \text{ und } a_3\cdot 3^3 + a_2\cdot 3^2 + a_1\cdot 3 = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1
\end{aligned}$$

Wir brauchen also die Lösung von

$$a_3 + a_2 + a_1 = 1 \tag{32}$$
$$8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 5 \tag{33}$$
$$27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 14. \tag{34}$$

Nach dem gaußschen Eliminationsverfahren erhalten wir $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$ D.h. unsere Vermutung lautet

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 =^? \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

was gleich der Formel in Aufgabe 4(i) ist:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

(iii) Die Methode ist hier die gleiche wie oben. Wir machen den Ansatz

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = a_4 n^4 + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

und bestimmen die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$, was zu

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

führt. Diese Formel wird nochmal durch Induktion bewiesen.

**Aufgabe 5.** IA (in $n$): $n = 0$. Es sei $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot x^k$ ($b_m \neq 0$) ein Polynom von Grad $m$ und $P = a_0 \neq 0$ ein Polynom von Grad $n = 0$. Nach Aufgabe 2 gilt

$$P(x)\cdot Q(x) = a_0 \cdot \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \tag{35}$$
$$= \sum_{k=0}^{m} a_0 b_k x^k, \tag{36}$$

und $a_0 b_m \neq 0$, somit ist $P \cdot Q$ ein Polynom von Grad $m = m + 0$.
IS (in $n$): Es sei $P$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \cdot x^k$ ein Polynom von Grad $n+1$ und $Q$, $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot x^k$ ein Polynom von Grad $m$. Unsere Aufgabe ist zu beweisen, dass $P \cdot Q$ ein Polynom von Grad $(n+1)+m$ ist.
IV: ist $P'$ ein Polynom von Grad $n$ und $Q$ ein Polynom von Grad $m$, so ist $P' \cdot Q$ ein Polynom von Grad $n+m$.
Nach Aufgabe 2 schreiben wir

$$\begin{aligned}
P(x) =& a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot x^k \quad \text{(Aufgabe 2 (3))} && (37)\\
=& a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k x \cdot x^{k-1} && (38)\\
=& a_0 + x \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^{k-1} \quad \text{(Aufgabe 2 (1))} && (39)\\
=& a_0 + x \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} x^k \quad \text{(Aufgabe 2 (4))}. && (40)
\end{aligned}$$

Außerdem

$$P(x) \cdot Q(x) = a_0 \cdot Q(x) + x \left( Q(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} x^k \right). \tag{41}$$

Nach der IV, ist $Q(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} x^k$ ein Polynom von Grad $n+m$, insbesondere ist

$$Q(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$$

mit $c_{n+m} \neq 0$. Nochmal nach Aufgabe 2 (1) und 2 (4) gilt

$$\begin{aligned}
P(x) \cdot Q(x) =& a_0 \cdot Q(x) + x \left( Q(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} x^k \right) && (42)\\
=& a_0 \cdot Q(x) + x \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k && (43)\\
=& a_0 \cdot Q(x) + \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^{k+1} && (44)\\
=& a_0 \cdot Q(x) + \sum_{k=1}^{n+m+1} c_{k-1} x^k && (45)\\
=& \sum_{k=0}^{n+m+1} d_k x^k. && (46)
\end{aligned}$$

Es gilt $d_k = c_{k-1}$ für $k > m$. Außerdem ist $d_{m+n+1} = c_{m+n} \neq 0$, somit ist $P \cdot Q$ von Grad $m+n+1$.