Sektion 4: Gleichmäßige Stetigkeit

Motivation: Eine Bedingung (für eine Fkt $f: I \to \mathbb{R}$), die stärkere ist als nur Stetigkeit (siehe unten); möge eine stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ erfüllen oder nicht.
Aber: Falls $I \equiv [a, b]$, dann immer richtig, wenn f stetig (großer Satz!!)

Definition 4.1.: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$.

f ist gleichmäßig stetig auf I (glm. stetig auf I) $:\Longleftrightarrow$ (**) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$) so daß: Wenn $x, y \in I$ und $|x - y| < \delta$, dann auch $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Moral: Für $\varepsilon > 0$ gegeben, gibt es $\delta > 0$, so daß (*) in Def. 3.1 gilt, egal was $x_0 \in I$ ist („gleichmäßig"). D.h., δ hängt nicht von $x_0 \in I$ ab.

Bemerkung 4.2: (a) Eine glm. stetige Fkt auf I ist insbesonders stetig auf I.

(b) Sehr wichtiges Konzept morgen!

Bsp. 4.3: (a) Sei $f(x) := x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Dann ist f glm. stetig auf $\mathbb{R}$.
Allgemeiner: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f(x) := x$, $f: I \to \mathbb{R}$, dann ist f glm. stetig auf I.

(Beweis: Sieht man aus Beweis für Bsp. 3.2 (b); siehe auch Üb.).

(b) Sei $g(x) := x^2$, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Dann ist g glm. stetig auf $[0,1]$ $(= I)$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta \overset{(\text{I})}{:=} \frac{\varepsilon}{2}$ (>0).
Sei $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| \overset{(\text{II})}{<} \delta$. Dann ist

$$|g(x)-g(y)| = |x^2 - y^2| = |(x-y)\cdot(x+y)| \underset{\text{Lemma 1.8 (iii)}}{=} |x-y| \cdot |x+y|$$

$$\overset{(\text{II})}{<} \delta \cdot |x+y| \underset{\text{Lemma 1.8 (i)}}{\le} \delta(|x|+|y|) \underset{|x|\le 1,\, |y| \le 1 \,:\, x,y \in [0,1]}{\le} 2 \cdot \delta \overset{(\text{I})}{=} \varepsilon$$

$\blacksquare$

(c) Sei $f(x) := x^2$, $I \equiv \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 = f(x)$

Dann ist f nicht glm. stetig auf $\mathbb{R}$.
(Hängt also von: (i) "Definition" von f ab
(ii) Vom Intervall I ab!).

Beweis: Ein Beispiel von einem sog. "Wiedersprchsbeweis".
Angenommen f wäre glm. stetig auf $\mathbb{R}$ $(\equiv I)$.
Dann gilt $(**)$ für alle $\varepsilon > 0$, insbesonders für $\varepsilon \equiv 1$ (>0).
Nehme $\delta > 0$, so daß $(**)$ gilt (mit $\varepsilon = 1$) (Möglich, falls f glm. stetig auf $\mathbb{R}$). D.h.:

Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $|x-y| < \delta$, dann auch $|x^2 - y^2| < 1$ $(= \varepsilon)$. (I)

Für $x \in \mathbb{R}$, nehme $y := x - \frac{\delta}{2}$; dann ist

$$|x-y| = \left|\frac{\delta}{2}\right| \underset{\delta>0}{=} \frac{\delta}{2} < \delta .$$

Aber $x^2 - y^2 = x^2 - (x - \frac{\delta}{2})^2 = x - (x^2 + \frac{\delta^2}{4} - \delta x)$

$$= \delta x - \frac{\delta^2}{4} = \delta(x - \frac{\delta}{4}).$$

Nehme jetzt $x > \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{4}$ (Erinnerung: $\delta > 0$). (Dann $x \in \mathbb{R}$)

Dann ist $x - \frac{\delta}{4} > \frac{1}{\delta}$, also $\delta(x - \frac{\delta}{4}) > 1$ $(\delta > 0)$.

und damit

$$|x^2-y^2| = |\delta(x-\tfrac{\delta}{4})| = \delta(x - \tfrac{\delta}{4}) > 1 \quad \underline{\text{für}}$$

$x > \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{4}$, $y := x - \frac{\delta}{2}$. $x, y \in \mathbb{R}$ $(= I)$.

Haben also $x, y \in \mathbb{R}$ gefunden, die erfüllen

$|x-y| < \delta$, aber mit $|x^2-y^2| > 1$ $(= \varepsilon)$.

Also kann (□) nicht stimmen. Wiederspruch!

(Zur Annahme f glm. stetig auf $\mathbb{R}$). Also ist

f nicht glm. stetig auf $\mathbb{R}$ ■

(d) Sei $f(x) := \frac{1}{x}$, $x \in \,]0,1]$ $(= I)$, $f: \,]0;1] \to \mathbb{R}$

Dann ist f nicht glm. stetig auf I

(siehe Üb.!)

(NB: Nach Satz 3.3 (iii) ist

f stetig auf I).

Allerdings gilt folgender wichtiger Satz, die wir jedoch hier nicht beweisen können (wird im Studium gemacht):

Satz 4.4. Sei $I := [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \leq b)$ abgeschlossener & beschränkter Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig (glm.) stetig auf I.

Bemerkung 4.5 (a) Bem. 4.2 (a) zeigt: Die Bedingung "f stetig" ist notwendig (wenn f nicht stetig, ist Konklusion des Satzes nicht richtig) (nie richtig für nicht stetig).

(b) Bsp. 4.3 (b) zeigt: Es gibt Fälle, wo, wenn I nicht beschränkt ist, dann ist Konklusion des Satzes falsch.
Bsp. 4.3 (a) zeigt aber: Konklusion nicht immer falsch, wenn I nicht beschränkt ist.

(c) Bsp. 4.3 (c) zeigt: Es gibt Fälle, wo, wenn I nicht abgeschlossen ist, dann ist Konklusion des Satzes falsch.
Bsp. 4.3 (a) zeigt aber: Konklusion ist nicht immer falsch, wenn I nicht abgeschlossen.

Stetige Funktion definiert auf abgeschl. & beschränkte Intervalle I $(= [a,b]$, für $a,b \in \mathbb{R})$ genießen andere allgemeine, "gute" / "nützliche" Eigenschaften: (können wir hier auch nicht beweisen).

Satz 4.6. Sei $I = [a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R}, a \leq b)$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $K > 0$:

$$|f(x)| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

(Man sagt: f ist beschränkt auf I).

Bem. 4.7: (a) Falls I nicht beschränkt ist, kann die Konklusion falsch sein
($Bsp.$: $g(x) = x$, $I = [0, \infty[$).

(b) Falls I nicht abgeschlossen ist, kann die Konklusion falsch sein.
(Bsp.: $f(x) = \frac{1}{x}$, $I =]0,1]$).

(c) Falls f nicht stetig ist, kann die Konklusion falsch sein (Bsp.: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in]0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $I = [0,1]$).

(Siehe auch Übungen).
