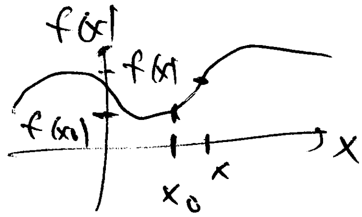
Sektion 3: Stetigkeit

Motivation: „Wenn x näher und näher zur x_0 kommt, kommt der Funktionswert an der Stelle x (d.h., $f(x)$) näher und näher zu der Funktionswert bei x_0 (d.h., $f(x_0)$)"



(ungenau!)

Definition 3.1.

a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ Funktion, $x_0 \in I$

f ist in x_0 (oder bei x_0) stetig $:\Longleftrightarrow$ (*) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ ($\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$) so daß: Wenn $x \in I$ und $|x - x_0| < \delta$, dann auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(„$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta, x \in I \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$")

b) Sei $f: I \to \mathbb{R}$. f ist stetig (auf I) $:\Longleftrightarrow$ f ist stetig bei x_0 für alle $x_0 \in I$

Beispiel 3.2.

a) Sei $a \in \mathbb{R}$, $f(x) := a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Konstante Fkt.)
Dann ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ($I = \mathbb{R}$) (siehe Üb.).

b) Sei $g(x) := x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\left(g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) := x \end{array} \right)$

Dann ist g stetig bei x_0 für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ ($I = \mathbb{R}$; d.h., g ist stetig, siehe Def. 3.1. b)).

Beweis: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Nehme $\delta :\overset{(\square)}{=} \varepsilon\ (>0)$. Angenommen, $x \in \mathbb{R}\ (= I)$ und $|x - x_0| \overset{(\square\square)}{<} \delta$. Dann ist

$$|g(x) - g(x_0)| \underset{\uparrow \text{ Def. } g}{=} |x - x_0| \underset{\uparrow \text{ Annahme } (\square\square)}{<} \delta \underset{\uparrow \text{ Wahl } (\square)}{=} \varepsilon,$$ d.h. (*) in Def. 3.1 a) gilt.

Also ist g stetig bei x_0. Als x_0 beliebig, ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ∎

Satz 3.3. Sei $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, und sei f, g stetig bei x_0. Dann gilt:

(i) $f + g : I \to \mathbb{R}$ ist stetig bei x_0.

(ii) $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ ist stetig bei x_0.

(iii) Falls $g(x_0) \neq 0$: $\frac{f}{g}$ ist stetig bei x_0.

Beweis: (i): Siehe Übungen.

(ii): Müssen zeigen: $f \cdot g$ erfüllt (*) in Def. 3.1 a)

Dürfen verwenden: f & g erfüllen —— " ——.

Zuerst:

$$|(f\cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| \overset{\text{Def } f\cdot g \text{ (siehe Def. 1.5 (ii))}}{=} |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)|$$

$$= |f(x)g(x) \underbrace{- f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0)}_{=0} - f(x_0)g(x_0)|$$

$$\overset{\Delta}{\leq} |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \qquad (\nabla)$$

Sei jetzt $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig.

Nehme jetzt $\delta_1 > 0$ so daß, für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_1$, gilt: $|f(x) - f(x_0)| < 1$ (möglich: f stetig bei x_0; verwende (*) in Def. 3.1 a) mit $\varepsilon := 1$).

Dann gilt (für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_1$):

$$|f(x)| = |(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)|$$

(□)
$$< 1 + |f(x_0)|$$

Anderseits: Nehme $\delta_2 > 0$ so daß, für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_2$, gilt

(□□)
$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\tilde{\varepsilon}/2}{1 + |f(x_0)|}$$

(möglich: g stetig bei x_0, verwende (*) in Def. 3.1 a) mit $\varepsilon := \frac{\tilde{\varepsilon}/2}{1 + |f(x_0)|}$ (>0)).

Sei jetzt $\delta_3 := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (>0), und $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_3$. Da $\delta_3 \leq \delta_1$, gilt (□). Da $\delta_3 \leq \delta_2$, gilt (□□). Also gilt (für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_3$)

(Δ)
$$|f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| < (1 + |f(x_0)|) \cdot \left(\frac{\tilde{\varepsilon}/2}{1 + |f(x_0)|} \right) = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}.$$

(siehe (∇)).

Falls $g(x_0) \neq 0$: Nehme $\delta_4 > 0$ so daß, für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_4$, gilt

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\tilde{\varepsilon}/2}{|g(x_0)|}$$

(möglich: f stetig bei x_0, verwende (*) in Def. 3.1 a) mit $\varepsilon := \frac{\tilde{\varepsilon}/2}{|g(x_0)|}$ (>0)).

Dann gilt

(ΔΔ)
$$|g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| < |g(x_0)| \cdot \frac{\tilde{\varepsilon}/2}{|g(x_0)|} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$$

(für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_4$)

Wenn $g(x_0)=0$, gilt $(\Delta\Delta)$ auch (d.h.,

$$|g(x_0)|\cdot|f(x)-f(x_0)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}), \text{ denn}$$

linke Seite $=0$, und $\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}>0$ (für alle $x\in I$ dann).

Zurück zur (∇): Sei $\tilde{\delta} := \min\{\delta_3,\delta_4\} = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_4\}>0$.
und sei $x\in I$ mit $|x-x_0|<\tilde{\delta}$.

Dann ist $|x-x_0|<\tilde{\delta}\le\delta_3 \Rightarrow$ es gilt (Δ)

und $|x-x_0|<\tilde{\delta}\le\delta_4 \Rightarrow$ es gilt $(\Delta\Delta)$.

Aus (∇) folgt: (für $x\in I$ mit $|x-x_0|<\tilde{\delta}$)

$$|(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)| \overset{(\nabla)}{\le} |f(x)|\cdot|g(x)-g(x_0)|+|g(x_0)|\cdot|f(x)-f(x_0)|$$

$$\overset{(\Delta)\,\&\,(\Delta\Delta)}{<} \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}+\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = \tilde{\varepsilon}.$$

Damit gilt $(*)$ in Def. 3.1 a) für die Funktion $f\cdot g$ (mit $\varepsilon \rightsquigarrow \tilde{\varepsilon}$ & $\delta \rightsquigarrow \tilde{\delta}$). Also ist $f\cdot g$ stetig bei x_0 ▨

<u>Beweis (iii)</u>: Schwierig! (?) Siehe Üb.

<u>Beispiel 3.4</u>: a) Sei $f(x):=x$, $g(x):=x$. Nach Bsp. 3.2 b) sind f & g stetig, also ist, nach Satz 3.3 (ii), $f\cdot g$ stetig. Damit:

$$x\mapsto x^2 \text{ ist stetig (auf } \mathbb{R}).$$

b) Analog (siehe Übung!): Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt: $x\mapsto x^n$ ist stetig.

Allgemeiner:

Proposition 3.5: Sei $P(x) := a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom ($a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$; siehe

Dann ist $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Siehe Übungen.

Bemerkung 3.6 Die (aus der Schule bekannten (?!)) Funktionen exp, ln (oder log), sin, cos sind alle stetig (ln auf $]0, \infty[$ $(= I)$).
Im Studium muss man zuerst sorgfältig diese Funktionen definieren.