Prof. Dr. Thomas Sørensen
Dr. R. Coelho

PROBESTUDIUM
ÜBUNGSBLATT 3

2.-6. September 2019
04.09.2019

Aufgabe 1. (i) Sei $a \in \mathbb{R}$ fix. Beweisen Sie (*nur* die Definition verwendend!), daß die konstante Funktion $f(x) := a$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) := ax$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stetig ist. (Hinweis: Verwende (i), ein Beispiel ais der Vorlesung, und ein Satz aus der Vorlesung).

(iii) Beweisen Sie, daß die Funktion $f(x) := x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist. (Hinweis: Satz und Beispiel aus der Vorlesung).

(iv) Beweisen Sie, daß die Funktion $f(x) := x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist. (Hinweis: (iii) und Satz und Beispiel aus der Vorlesung).

(v) Sei $n \in \mathbb{N}$ fix. Beweisen Sie, daß die Funktion $f(x) := x^n$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist. (Hinweis: Die Ideen aus (iv) und Induktion).

(vi) Sei $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) := ax^n$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

(vii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (mit $a_n \neq 0$), und sei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Polynom vom Grad n definiert bei $P(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Zeigen Sie, daß P in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Damit haben wir Proposition 3.5 aus der Vorlesung bewiesen.

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie Satz 3.3 (i) aus der Vorlesung: Sei $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, und sei f, g stetig bei x_0.

Dann ist $f + g : I \to \mathbb{R}$ stetig bei x_0.

Hinweis:

$$(f+g)(x) - (f+g)(x_0) = \Big(g(x) - g(x_0)\Big) + \Big(f(x) - f(x_0)\Big) \tag{1}$$

(ii) Sei $g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x_0) \neq 0$, und sei g stetig bei x_0. Zeigen Sie: Es existiert $\delta > 0$ so daß $g(x) \neq 0$ für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

(iii) Zeigen Sie Satz 3.3 (iii) aus der Vorlesung: Sei $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x_0) \neq 0$, und sei f, g stetig bei x_0.

Dann ist $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ stetig bei x_0.

Aufgabe 3. Aufgaben von gestern und vorgestern!