Prof. Dr. Thomas Sørensen
Dr. R. Coelho

PROBESTUDIUM
ÜBUNGSBLATT 1

2.-6. September 2019
02.09.2019

Aufgabe 1. Beweisen/Zeigen Sie, per Induktion:

(i) $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1,\ k \text{ ungerade}}^{n} k := \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

(iii) Für alle $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Aufgabe 2 (Rechenregeln Summen)**.** Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, alle $a, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, und alle $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a a_k \quad (\text{d.h., } = \sum_{k=0}^{n} c_k \text{ mit } c_k := a a_k). \tag{1}$$

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big) = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) \quad (\text{d.h., } = \sum_{k=0}^{n} d_k \text{ mit } d_k := a_k + b_k). \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \quad (\text{hier: } n \geq 1)\,. \tag{3}$$

Insbesonders (“Index verschieben in Summen”):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\,. \tag{4}$$

(Hinweis: Induktion (und Definition 1.2)).

Aufgabe 3. Beweisen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x| = |-x| \qquad (\text{Hinweis: Fallunterscheidung}), \tag{5}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad (\text{Hinweis: Fallunterscheidung}), \tag{6}$$

$$|x - y| \leq |x| + |y| \qquad (\text{Hinweis: Verwende (5) und Lemma 1.8 (i)}), \tag{7}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad (\text{Hinweis: Fallunterscheidung}). \tag{8}$$

Aufgabe 4. (i) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (\text{Hinweis: Induktion; siehe auch Bsp. 1.4 (b)}). \tag{9}$$

(ii) Wie kommt man auf (9)? (oder auf $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$?).

(iii) Versuchen Sie, ein ähnlichen (!) Formel für $\sum_{k=0}^{n} k^3$ zu finden - und zu beweisen!.

Aufgabe 5. Beweisen Sie Lemma 1.11 (b): Sei P Polynom von Grad n und Q Polynom von Grad m. Dann ist $P \cdot Q$ Polynom von Grad $n + m$.