6. Tutorium zu MPIIA 30.05.-02.06.2005

Aufgabe 16: Sei

$C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$.

a) Zeigen Sie, daß $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt auf $C[0,1]$ definiert.

b) Sei $f_0(t) = 1, f_1(t) = t, f_2(t) = t^2, t \in [0,1]$. Berechnen Sie $\langle f_n, f_m\rangle$ für $n, m \in \{0,1,2\}$.

c) Bilden Sie ein Orthonormalsystem aus f_0, f_1, f_2. (Schmidtverfahren!)

Aufgabe 17: Sei V die Menge aller Nullfolgen,

$V = \{a = (a_1, a_2, \ldots) \mid a_j \in \mathbb{R}, a_j \to 0, j \to \infty\}$.

a) Zeigen Sie, daß V ein Vektorraum ist.

b) Sei $\|a\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j|, a \in V$. Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf V ist.

Aufgabe 18: Sei $(V, \|\cdot\|_\infty)$ wie in **17**,

$f : V \to V,\ (a_1, a_2, \ldots) \overset{f}{\mapsto} (1, a_1, a_2, \ldots)$.

a) Zeigen Sie, daß

$\|f(a) - f(b)\|_\infty = \|a - b\|_\infty,\ a, b \in V$.

b) Zeigen Sie, daß f *keinen* Fixpunkt hat (d.h., $x \neq f(x)$ für alle $x \in V$).