

## 6. Tutorium zu MPIIA 30.05.-02.06.2005

### Aufgabe 16: Sei

$C[0, 1] := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}.$

- a) Zeigen Sie, daß  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  ein Skalarprodukt auf  $C[0, 1]$  definiert.
- b) Sei  $f_0(t) = 1, f_1(t) = t, f_2(t) = t^2, t \in [0, 1]$ . Berechnen Sie  $\langle f_n, f_m \rangle$  für  $n, m \in \{0, 1, 2\}$ .
- c) Bilden Sie ein Orthonormalsystem aus  $f_0, f_1, f_2$ . (Schmidtverfahren!)

### Aufgabe 17: Sei $V$ die Menge aller Nullfolgen,

$V = \{a = (a_1, a_2, \dots) \mid a_j \in \mathbb{R}, a_j \rightarrow 0, j \rightarrow \infty\}.$

- a) Zeigen Sie, daß  $V$  ein Vektorraum ist.
- b) Sei  $\|a\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j|, a \in V$ . Zeigen Sie, daß  $\|\cdot\|_\infty$  eine Norm auf  $V$  ist.

### Aufgabe 18: Sei $(V, \|\cdot\|_\infty)$ wie in 17,

$f : V \rightarrow V, (a_1, a_2, \dots) \xrightarrow{f} (1, a_1, a_2, \dots).$

- a) Zeigen Sie, daß  $\|f(a) - f(b)\|_\infty = \|a - b\|_\infty, a, b \in V.$
- b) Zeigen Sie, daß  $f$  *keinen* Fixpunkt hat (d.h.,  $x \neq f(x)$  für alle  $x \in V$ ).