Mathematisches Institut der Universität München
Prof. Dr. Heinrich Steinlein 02.07.2005

1. Klausur zu MPIIA

Nachname: ....

Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ

Diese Angabe hat 6 Blätter (6 Aufgaben), bitte **GLEICH** jedes Blatt mit Namen versehen, und Schein unten ausfüllen. Die Lösungen nicht auf ein Blatt mit der Angabe zu einer anderen Aufgabe schreiben!
Die **Lösungen** sollten mit allen Zwischenschritten klar aufgeschrieben werden. Resultate ohne ausreichende, folgerichtige Begründungen werden nicht akzeptiert. **In der Vorlesung bewiesene Resultate dürfen verwendet werden, nicht aber im Tutorium und in der Übungen bewiesene Aussagen.**

Nachname: .... Vorname: ....

Aufgabe 1: (6 Punkte)

(a) Man finde eine Stammfunktion zu $f(x) = x^3 \sin(x^2)$. (Hinweis: partielle Integration).

(b) Existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^{-x}\, dx$? (Hinweis: vergleiche mit $\int_2^\infty x^{-\alpha}\, dx$ für passende α).

Lösungsvorschlag: (a)

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin(x^2)\, dx &= \frac{1}{2}\int x^2(2x\sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\big[x^2(-\cos(x^2)) - \int 2x(-\cos(x^2)\, dx\big] \\ &= -\frac{1}{2}x^2\cos(x^2) + \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2)\, dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(x^2) + \frac{1}{2}\sin(x^2).\end{aligned}$$

Es wurde partielle Integration verwendet, daß $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, und daß (mit der substitution $u = x^2$ zweimal), $\int 2x\sin(x^2)\, dx = \int \sin(u)\, du = -\cos(u) = -\cos(x^2)$, $\int 2x\cos(x^2)\, dx = \int \cos(u)\, du = \sin(u) = \sin(x^2)$.

(b) Sei $R > 2$. Die Funktion $x \mapsto x^{-x}$ ist auf $[1, R]$ stetig und beschränkt, also existieren $\int_1^2 x^{-x}\, dx$ und $\int_1^R x^{-x}\, dx$. Es gilt, für $x \geq 2$, daß $\ln x > 0$, und damit

$$x \geq 2 \Rightarrow -x \leq -2 \Rightarrow -x\ln x \leq -2\ln x \Rightarrow \ln(x^{-x}) \leq \ln(x^{-2}) \Rightarrow x^{-x} \leq x^{-2}.$$

(Die letzte Implikation weil $t \mapsto e^t$ monoton wachsend ist). Weil x^{-x}, bekommt man

$$\begin{aligned}0 \leq \int_1^R x^{-x}\, dx &= \int_1^2 x^{-x}\, dx + \int_2^R x^{-x}\, dx \leq \int_1^2 x^{-x}\, dx + \int_2^R x^{-2}\, dx \\ &= \int_1^2 x^{-x}\, dx + \big[-\frac{1}{x}\big]_2^R = \int_1^2 x^{-x}\, dx + \frac{1}{2} - \frac{1}{R} \\ &\nearrow \int_1^2 x^{-x}\, dx + \frac{1}{2}\ ,\ R \to \infty.\end{aligned}$$

Damit ist die Funktion $R \mapsto \int_1^R x^{-x}\, dx$ beschränkt, und monoton wachsend (weil $x^{-x} \geq 0$ auf $[2, \infty[$, und damit existiert $\lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-x}\, dx$, d.h. das uneigentliche Integral $\int_i^\infty x^{-x}\, dx$ existiert.

Nachname: .... Vorname: ....

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Man berechne die Bogenlänge des Graphen von $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh x$.

Lösungsvorschlag: Für die Kurve $\gamma(x) = (x, f(x))$, $x \in [0,1]$ ist die Bogenlänge gleich

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\gamma'(x)|\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = int_0^1 \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx \\ = \int_0^1 \sqrt{\cosh^2 x}\, dx = \int_0^1 \cosh x\, dx = [\sinh x]_0^1 = \sinh 1 = \frac{e - e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Verwendet wurde, daß

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \;;\; \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \;;\; \cosh x \geq 0 \;\forall x \;; \\ &\int \cosh x\, dx = \sinh x \;; \sinh 0 = 0. \end{aligned}$$

Nachname: .... Vorname: ....

Aufgabe 3: (6 Punkte)

(a) Zeige, daß $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$d_1(x,y) := \min\left\{|x-y|, 1\right\}$$

eine zur Euklidischen Metrik $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$, $d(x,y) := |x-y|$, äquivalente Metrik ist.

(b) Ist in $(\mathbb{R}^n, d_1)$ jede beschränkte abgeschlossene Menge kompakt?

Nachname: .... Vorname: ....

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Sei $C^1_0[0,1] := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \in C^1[0,1], f(0) = 0 \right\}$. Zeige, daß

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f'(x) g'(x)\, dx$$

auf $C^1_0[0,1]$ ein Skalarprodukt definiert.
(Der Nachweis, daß $C^1_0[0,1]$ Vektorraum ist, wird nicht verlangt.)

Nachname: .... Vorname: ....

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Berechne das Taylorpolynom von Grad 2 zur Funktion $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ um den Entwicklungspunkt $(1,0)$.

Lösungsvorschlag:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ; \ \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1 \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0 \ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 0 \ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) = \frac{1-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \ ; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 1 \ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) = x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\big((x^2+y^2)^{-1/2}\big) = x\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 2y\cdot(x^2+y^2)^{-3/2}$$

$$= \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y); \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0.$$

Taylorpolynom von Grad 2 zur f um $(x,y) = (1,0)$:

$$\begin{aligned}(T_2 f)(x,y) &= f(1,0) + \big[\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\big](x-1) + \big[\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\big]y \\ &\quad + \frac{1}{2}\big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)\big](x-1)^2 + \frac{1}{2}\big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)\big]y^2 + \big[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big](x-1)y \\ &= 1 + 1\cdot(x-1) + 0\cdot y + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot y^2 + 0\cdot(x-1)y \\ &= 1 + x - 1 + \frac{1}{2}y^2 = x + \frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

Nachname: .... Vorname: ....

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Sei $g : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x,y) = x^2 + x - y^2$.

Bestimmen Sie alle globalen und lokalen Extrema von g.

Lösungsvorschlag: Die Menge $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$ ist kompakt, weil abgeschlossen und beschränkt (Heine-Borel).
Beschränkt: Für alle $(x,y) \in A$: $\big|(x,y)\big| \le 1$.
Abgeschlossen: $A = k^{-1}(\,]-\infty,1])$, $k(x,y) = x^2 + y^2$, $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, $]-\infty,1]$ abgeschlossen; das Urbild einer abgeschlossener Menge unter eine stetige Funktion ist abgeschlossen.
Damit (VI.3.4 Satz) *hat* g ein globales Maximum und ein globales Minimum auf A.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x + 1 \;;\; \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2y;$$

$$\nabla g(x,y) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\Big) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (-\frac{1}{2}, 0)$$

Man sieht, dass tatsächlich $\nabla g(-\frac{1}{2},0) = (0,0)$. Die Hesse-Matrix von g im Punkte $(x,y) = (-\frac{1}{2},0)$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 2 \;;\; \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -2 \;;\; \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y) = 0 \;;$$

$$(D^2 g)(-\frac{1}{2},0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(-\frac{1}{2},0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(-\frac{1}{2},0) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(-\frac{1}{2},0) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(-\frac{1}{2},0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Weil eine Eigenwert positiv ist, und der andere negativ, ist $(x,y) = (-\frac{1}{2},0)$ ein Sattelpunkt. Es gibt also im Inneren von A weder lokale Minima noch lokale Maxima (insbesonders dann auch keine *globalen*).

Am Rand von A: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$, d.h.

$$(x,y) \in \partial A \Rightarrow g(x,y) = x^2 + x - y^2 = x^2 + x - (1-x^2)2x^2 + x - 1 \equiv f(x) \;,\; x \in [-1,1].$$

Man hat

$$f'(x) = 4x + 1 \;;\; f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \;;$$

$$f(-1) = 0 \;;\; f(1) = 2 \;;\; f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}.$$

Man sieht also, daß das globale Maximum von g gleich 2 ist, und in $(x,y) = (1,0)$ angenommen wird. Daher ist auch $(x,y) = (1,0)$ *lokale* Maximum.

Das globale Minimum von g ist gleich $-\frac{1}{4}$, und wird in $(x,y) = (-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$ und in $(x,y) = (-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4})$ angenommen. Diese zwei Punkte sind auch *lokale* Minima.

Endlich zu $(x,y) = (-1,0)$. Man hat $\nabla g(x,y) = (-1,0)$, und damit ist die Richtungsableitung in der Richtung u ($|u| = 1$ gegeben durch $D_u g(-1,0) = \langle (u_1,u_2), (-1,0) \rangle$. Vektoren u, die Richtungen *rein* in A angeben, sind gegeben durch $u = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}]$. Dies gibt $D_u g(-1,0) = -\cos\theta \le 0, \theta \in [-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}]$. Also ist die Ableitung von g in jede Richtung, die rein in A gehe, *negativ*. Also ist $(x,y) = (-1,0)$ ein lokales Maximum.