Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein

13.06.2005

Übungsblatt 9 zu MPIIA

Aufgabe 33: (4 Punkte)

a) Es seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ alle aus $C^2(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie:

1) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} u) = 0$.
2) $\nabla(\operatorname{div} u) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) = \Delta u$.
3) $\operatorname{rot}(fu) = \nabla f \times u + f(\operatorname{rot} u)$.

b) Zeigen Sie: Sind $f, g : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus $C^2(M)$, so gilt

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g.$$

c) Zeigen Sie: Ist $F : I \to \mathbb{R}$, $I \subset]0, \infty[$, eine C^2-Funktion und $f(x) := F(r)$, wobei $r := |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\Delta f(x) = F''(r) + \frac{n-1}{r} F'(r).$$

d) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus $C^2(\mathbb{R}^2)$ und $F(r, \varphi) := f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, so gilt

$$(\Delta f)(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\Big)(r, \varphi).$$

Aufgabe 34: (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2).$$

Es ist $(1, 1, \ln 2) \in \operatorname{Graph}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$.

a) Stellen die Tangentialebene an $\operatorname{Graph}(f)$ in diesem Punkt als Graph einer Funktion $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dar.

b) Approximieren Sie $\operatorname{Graph}(f)$ in der Nähe von $(1, 1, \ln 2)$ durch den Graph eines Polynoms 2. Grades in x und y. (Hinweis: Taylor).

Aufgabe 35: (4 Punkte) Eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, falls u aus $C^2(U)$ ist und die Gleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllt ist.

Sei $f = u + iv : \mathbb{C} \supset U \to \mathbb{C}$ *komplex* differenzierbar, und $u, v \in C^2(U, \mathbb{R})$ (hier interpretieren wir $u(x + iy) = u(x, y), v(x + iy) = v(x, y)$). Zeigen Sie, daß u und v harmonisch sind.

Aufgabe 36: (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ aus $C^1(\mathbb{R}^m)$.

a) Zeigen Sie, daß

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \big[f'(x + t(y - x))\big](y - x)\, dt$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$. (Hinweis: Kettenregel).

b) Sei $\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2}$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Zeigen Sie, daß

$$|Ax| \le \|A\|_2 |x|$$

für all $x \in \mathbb{R}^m$.

c) Zeigen Sie, daß

$$\big|f(x) - f(y)\big| \le C|x - y| \quad \text{mit} \quad C := \sup_{t \in [0,1]} \|f'(x + t(y - x))\|_2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Abgabe bis Montag 20.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` **sind die Blätter im Internet abrufbar.**
Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335