

## Übungsblatt 9 zu MPIIA

### Aufgabe 33: (4 Punkte)

a) Es seien  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  alle aus  $C^2(\mathbb{R}^3)$ . Zeigen Sie:

- 1)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} u) = 0$ .
- 2)  $\nabla(\operatorname{div} u) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) = \Delta u$ .
- 3)  $\operatorname{rot}(fu) = \nabla f \times u + f(\operatorname{rot} u)$ .

b) Zeigen Sie: Sind  $f, g : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $C^2(M)$ , so gilt

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g.$$

c) Zeigen Sie: Ist  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset ]0, \infty[$ , eine  $C^2$ -Funktion und  $f(x) := F(r)$ , wobei  $r := |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , so gilt

$$\Delta f(x) = F''(r) + \frac{n-1}{r}F'(r).$$

d) Zeigen Sie: Ist  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $C^2(\mathbb{R}^2)$  und  $F(r, \varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ , so gilt

$$(\Delta f)(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right)(r, \varphi).$$

**Aufgabe 34: (4 Punkte)** Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) := x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2).$$

Es ist  $(1, 1, \ln 2) \in \operatorname{Graph}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ .

- a) Stellen die Tangentialebene an  $\operatorname{Graph}(f)$  in diesem Punkt als Graph einer Funktion  $\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dar.
- b) Approximieren Sie  $\operatorname{Graph}(f)$  in der Nähe von  $(1, 1, \ln 2)$  durch den Graph eines Polynoms 2. Grades in  $x$  und  $y$ . (Hinweis: Taylor).

**Aufgabe 35: (4 Punkte)** Eine Funktion  $u : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *harmonisch*, falls  $u$  aus  $C^2(U)$  ist und die Gleichung  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  erfüllt ist.

Sei  $f = u + iv : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar, und  $u, v \in C^2(U, \mathbb{R})$  (hier interpretieren wir  $u(x + iy) = u(x, y), v(x + iy) = v(x, y)$ ). Zeigen Sie, daß  $u$  und  $v$  harmonisch sind.

**Aufgabe 36: (4 Punkte)** Sei  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  aus  $C^1(\mathbb{R}^m)$ .

a) Zeigen Sie, daß

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 [f'(x + t(y - x))](y - x) dt$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^m$ . (Hinweis: Kettenregel).

b) Sei  $\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2}$ ,  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Zeigen Sie, daß

$$|Ax| \leq \|A\|_2 |x|$$

für all  $x \in \mathbb{R}^m$ .

c) Zeigen Sie, daß

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \text{mit} \quad C := \sup_{t \in [0,1]} \|f'(x + t(y - x))\|_2$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^m$ .

**Abgabe bis Montag 20.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.**

**Unter <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen> sind die Blätter im Internet abrufbar.**

|                                     |                             |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| <b>Sprechstunden: H. Steinlein:</b> | <b>Mo 10-11, Zimmer 318</b> |
| <b>T. Sørensen:</b>                 | <b>Mi 14-15, Zimmer 335</b> |