

## Übungsblatt 8 zu MPIIA

**Aufgabe 29: (4 Punkte)** Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante der Abbildung

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

Lösungsvorschlag:  $F = (F_1, F_2, F_3)$ ,

$$F'(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial r} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det F'(r, \theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \cdot \det \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\ - r \cos \theta \cos \varphi \cdot \det \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \\ + (-r \sin \theta \sin \varphi) \cdot \det \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{pmatrix} \\ = \sin \theta \cos \varphi \cdot r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi + r \cos \theta \cos \varphi \cos \theta r \sin \theta \cos \varphi \\ + (-r \sin \theta \sin \varphi)(-r \sin^2 \theta \sin \varphi - r \cos^2 \theta \sin \varphi) \\ = r^2 \sin \theta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \\ + (-r \sin \theta \sin \varphi)(-r \sin \varphi [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta]) \\ = r^2 \sin \theta \cos^2 \varphi [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] + r^2 \sin \theta \sin^2 \varphi \\ = r^2 \sin \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \sin \theta.$$

**Aufgabe 30: (4 Punkte)** Sei  $A$  eine symmetrische  $n \times n$  Matrix mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, daß die kritischen Punkte, d.h. die Punkte mit verschwindendem Gradienten, der Funktion

$$R: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad R(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{|x|^2},$$

genau die Eigenvektoren von  $A$  sind.

Lösungsvorschlag: Mit  $A = (a_{ij})$  bekommt man

$$R(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j}{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

und damit, für  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\frac{\partial R}{\partial x_k}(x) = \frac{|x|^2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j) - \langle Ax, x \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\sum_{j=1}^n x_j^2)}{|x|^4} \\ = \frac{|x|^2 (\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i) - \langle Ax, x \rangle 2x_k}{|x|^4} \quad \left( \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i x_k) = \delta_{ki} x_j + x_i \delta_{jk} \right) \\ = \frac{2|x|^2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - 2x_k \langle Ax, x \rangle}{|x|^4} \quad (A^T = A \Rightarrow a_{kj} = a_{jk})$$

und damit (weil  $\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = (Ax)_k$ )

$$\begin{aligned}\nabla R(x) &= \frac{2}{|x|^2} \left( \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right) - 2 \frac{\langle Ax, x \rangle}{|x|^4} (x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{2}{|x|^2} (Ax - R(x)x).\end{aligned}$$

Weil immer  $x \neq 0$  gilt, bekommt man also

$$\begin{aligned}\nabla R(x) = 0 &\Rightarrow Ax = R(x)x \Rightarrow x \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ mit Eigenwert } R(x); \\ Ax = \lambda x & \text{ (d.h., } x \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ mit Eigenwert } \lambda) \\ \Rightarrow R(x) &= \frac{\langle Ax, x \rangle}{|x|^2} = \frac{\langle \lambda x, x \rangle}{|x|^2} = \lambda \\ \Rightarrow \nabla R(x) &= \frac{2}{|x|^2} (Ax - R(x)x) = \frac{2}{|x|^2} (Ax - \lambda x) = 0.\end{aligned}$$

Also sind die kritischen Punkten von  $R$  genau die Eigenvektoren von  $A$ .

**Aufgabe 31: (4 Punkte)** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$  mit

$$f^k(x_0) := \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_k(x_0) = x_0.$$

Sei  $f$  in  $x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0) \in \mathbb{R}^n$  total differenzierbar. Zeigen Sie, daß

$$\det((f^k)'(x_0)) = \det((f^k)'(f(x_0))).$$

Hinweis: Kettenregel.

*Lösungsvorschlag:* Unter Verwendung der Kettenregel bekommt man (weil  $f^k(x_0) = x_0$ )

$$\begin{aligned}(f^k)'(f(x_0)) &= (f \circ f^{k-1})'(f(x_0)) = f'(f^{k-1}(f(x_0))) \circ (f^{k-1})'(f(x_0)) \\ &= f'(f^k(x_0)) \circ (f \circ f^{k-2})'(f(x_0)) = f'(x_0) \circ f'(f^{k-2}(f(x_0))) \circ (f^{k-2})'(f(x_0)) \\ &= f'(x_0) \circ f'(f^{k-1}(x_0)) \circ (f \circ f^{k-3}(f(x_0))) \\ &= \dots = \\ &= f'(x_0) \circ f'(f^{k-1}(x_0)) \circ f'(f^{k-2}(x_0)) \circ \dots \circ f'(f^2(x_0)) \circ f'(f(x_0)).\end{aligned}$$

Andererseits,

$$\begin{aligned}(f^k)'(x_0) &= (f \circ f^{k-1})'(x_0) = f'(f^{k-1}(x_0)) \circ (f^{k-1})'(x_0) = f'(f^{k-1}(x_0)) \circ (f \circ f^{k-2})'(x_0) \\ &= f'(f^{k-1}(x_0)) \circ f'(f^{k-2}(x_0)) \circ (f^{k-2})'(x_0) \\ &= \dots = \\ &= f'(f^{k-1}(x_0)) \circ f'(f^{k-2}(x_0)) \circ \dots \circ f'(f(x_0)) \circ f'(x_0).\end{aligned}$$

Weil  $\det(AB) = \det(BA)$  bekommt man

$$\begin{aligned}\det(f^k)'(x_0) &= \det\left(\prod_{j=1}^{k-1} f'(f^{k-j}(x_0))\right) \det f'(x_0) \\ &= \det f'(x_0) \det\left(\prod_{j=1}^{k-1} f'(f^{k-j}(x_0))\right) = \det(f^k)'(f(x_0)).\end{aligned}$$

**Aufgabe 32: (4 Punkte)** Bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

- a) Sei  $b \in \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, daß die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \langle a, x \rangle + b$  in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar ist mit  $f'(x_0)v = \langle a, v \rangle$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ .
- b) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reellwertige Matrix. Es bezeichne  $A^T$  die zu  $A$  transponierte Matrix. Zeigen Sie, daß die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$  in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar ist mit  $f'(x_0)v = \langle Ax_0 + A^T x_0, v \rangle$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ .

*Lösungsvorschlag:* a) Man hat, durch Linearität des Skalarprodukts, daß

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0) - \langle a, x - x_0 \rangle| &= |(\langle a, x \rangle + b) - (\langle a, x_0 \rangle + b) - \langle a, x - x_0 \rangle| \\ &= |\langle a, x - x_0 \rangle - \langle a, x - x_0 \rangle| = 0, \end{aligned}$$

und  $h : v \mapsto \langle a, v \rangle$  ist eine Homeomorphismus,  $h \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ . Also ist (VII 1.1. Def.)  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar, und  $f'(x_0)v = \langle a, v \rangle$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ .

b) Fast gleich bekommt man (unter verwendung von  $\langle A^T x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$  und  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ , Linearität des Skalarprodukts, und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz), daß

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0) - \langle Ax_0 + A^T x_0, x - x_0 \rangle| &= |\langle Ax, x \rangle - \langle Ax_0, x_0 \rangle - \langle Ax_0, x \rangle + \langle Ax_0, x_0 \rangle - \langle A^T x_0, x \rangle + \langle A^T x_0, x_0 \rangle| \\ &= |\langle Ax, x \rangle - \langle Ax_0, x \rangle + \langle A^T x_0, x_0 \rangle - \langle A^T x_0, x \rangle| \\ &= |\langle Ax, x \rangle - \langle Ax_0, x \rangle + \langle x_0, Ax_0 \rangle - \langle x_0, Ax \rangle| \\ &= |\langle Ax - Ax_0, x \rangle + \langle x_0, Ax_0 - Ax \rangle| = |\langle x, Ax - Ax_0 \rangle + \langle x_0, Ax_0 - Ax \rangle| \\ &= |\langle x_0, Ax_0 - Ax \rangle - \langle x, Ax_0 - Ax \rangle| = |\langle x_0 - x, A(x_0 - x) \rangle| \\ &\leq |x_0 - x| \cdot |A(x_0 - x)|. \end{aligned}$$

Behauptung:

$$|Av| \leq n \left( \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right) |v|.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |Av|^2 &= \langle Av, Av \rangle = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left[ \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right] |v_j| \right)^2 \\ &= n \left( \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right)^2 \left( \sum_{j=1}^n |v_j| \right)^2 = n \left( \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right)^2 \left\{ \langle (|v_1|, \dots, |v_n|), (1, \dots, 1) \rangle \right\}^2 \\ &\leq n \left( \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right)^2 |v|^2 |(1, \dots, 1)|^2 = n^2 \left( \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \right)^2 |v|^2 \end{aligned}$$

Also folgt (mit  $\delta := \frac{\epsilon}{n(\max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|)}$ ),

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) - \langle Ax_0 + A^T x_0, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon |x - x_0|,$$

und  $h : v \mapsto \langle Ax_0 + A^T x_0, v \rangle$  ist eine Homeomorphismus,  $h \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ . Also ist (VII 1.1. Def.)  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar, und  $f'(x_0)v = \langle Ax_0 + A^T x_0, v \rangle$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ .

**Abgabe bis Montag 13.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.**

**Unter <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen> sind die Blätter im Internet abrufbar.**

**Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318**  
**T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335**