Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein 06.06.2005

Übungsblatt 8 zu MPIIA

Aufgabe 29: (4 Punkte) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante der Abbildung

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag: $F = (F_1, F_2, F_3)$,

$$F'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial r} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det F'(r,\theta,\varphi) &= \sin\theta\cos\varphi \cdot \det\begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &- r\cos\theta\cos\varphi \cdot \det\begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &+ (-r\sin\theta\sin\varphi) \cdot \det\begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi & r\cos\eta\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \sin\theta\cos\varphi \cdot r^2\sin^2\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\cos\theta r\sin\theta\cos\varphi \\ &+ (-r\sin\theta\sin\varphi)(-r\sin^\theta\sin\varphi - r\cos^2\theta\sin\varphi) \\ &= r^2\sin\theta\sin^\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^\theta\cos^2\varphi \\ &+ (-r\sin\theta\sin\varphi)(-r\sin\varphi[\sin^2\theta + \cos^2\theta]) \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\varphi[\sin^2\theta + \cos^2\theta] + r^2\sin\theta\sin^2\varphi \\ &= r^2\sin\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Aufgabe 30: (4 Punkte) Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, daß die kritischen Punkte, d.h. die Punkte mit verschwindendem Gradienten, der Funktion

$$R : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\ ,\ R(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{|x|^2},$$

genau die Eigenvektoren von A sind.

Lösungsvorschlag: Mit $A = (a_{ij})$ bekommt man

$$R(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j}{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

und damit, für $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x_k}(x) &= \frac{|x|^2 \frac{\partial}{\partial x_k}(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j) - \langle Ax, x\rangle \frac{\partial}{\partial x_k}(\sum_{j=1}^n x_j^2)}{|x|^4} \\ &= \frac{|x|^2(\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik}x_i) - \langle Ax, x\rangle 2x_k}{|x|^4} \qquad (\frac{\partial}{\partial x_k}(x_ix_j) = \delta_{ki}x_j + x_i\delta_{jk}) \\ &= \frac{2|x|^2\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - 2x_k\langle Ax, x\rangle}{|x|^4} \qquad (A^T = A \Rightarrow a_{kj} = a_{jk}) \end{aligned}$$

und damit (weil $\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = (Ax)_k$)

$$\begin{aligned}\nabla R(x) &= \frac{2}{|x|^2}\Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\Big) - 2\frac{\langle Ax, x\rangle}{|x|^4}(x_1,\dots,x_n)\\ &= \frac{2}{|x|^2}\big(Ax - R(x)\,x\big)^T.\end{aligned}$$

Weil immer $x \neq 0$ gilt, bekommt man also

$$\begin{aligned}&\nabla R(x) = 0 \Rightarrow Ax = R(x)\,x \Rightarrow x \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ mit Eigenwert } R(x);\\ &Ax = \lambda x \text{ (d.h., } x \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ mit Eigenwert } \lambda)\\ &\Rightarrow R(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{|x|^2} = \frac{\langle \lambda x, x\rangle}{|x|^2} = \lambda\\ &\Rightarrow \nabla R(x) = \frac{2}{|x|^2}\big(Ax - R(x)\,x\big)^T = \frac{2}{|x|^2}(Ax - \lambda x)^T = 0.\end{aligned}$$

Also sind die kritischen Punkten von R genau die Eigenvektoren von A.

Aufgabe 31: (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ mit

$$f^k(x_0) := (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k})(x_0) = x_0.$$

Sei f in $x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0) \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar. Zeigen Sie, daß

$$\det\big((f^k)'(x_0)\big) = \det\big((f^k)'(f(x_0))\big).$$

Hinweis: Kettenregel.

Lösungsvorschlag: Unter Verwendung der Kettenregel (die insbesonders gibt, daß f^i, $1 \le i \le k$ in $x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0) \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar sind) bekommt man (weil $f^k(x_0) = x_0$)

$$\begin{aligned}(f^k)'(f(x_0) &= (f \circ f^{k-1})'(f(x_0)) = f'(f^{k-1}(f(x_0))) \circ (f^{k-1})'(f(x_0))\\ &= f'(f^k(x_0)) \circ (f \circ f^{k-2})'(f(x_0)) = f'(x_0) \circ f'(f^{k-2}(f(x_0))) \circ (f^{k-2})'(f(x_0))\\ &= f'(x_0) \circ f'(f^{k-1}(x_0)) \circ (f \circ f^{k-3}(f(x_0)))\\ &= \cdots = \quad \text{(Induktion !)}\\ &= f'(x_0) \circ f'(f^{k-1}(x_0)) \circ f'(f^{k-2}(x_0)) \circ \cdots \circ f'(f^2(x_0)) \circ f'(f(x_0)).\end{aligned}$$

Anderseits,

$$\begin{aligned}(f^k)'(x_0) &= (f \circ f^{k-1})'(x_0) = f'(f^{k-1}(x_0)) \circ (f^{k-1})'(x_0) = f'(f^{k-1}(x_0)) \circ (f \circ f^{k-2})'(x_0)\\ &= f'(f^{k-1}(x_0)) \circ f'(f^{k-2}(x_0)) \circ (f^{k-2})'(x_0)\\ &= \cdots = \quad \text{(Induktion !)}\\ &= f'(f^{k-1}(x_0)) \circ f'(f^{k-2}(x_0)) \circ \cdots f'(f(x_0)) \circ f'(x_0).\end{aligned}$$

Weil $\det(AB) = \det(BA)$ bekommt man

$$\begin{aligned}\det(f^k)'(x_0) &= \det\Big(\prod_{j=1}^{k-1} f'(f^{k-j}(x_0))\Big)\det f'(x_0)\\ &= \det f'(x_0)\det\Big(\prod_{j=1}^{k-1} f'(f^{k-j}(x_0))\Big) = \det(f^k)'(f(x_0).\end{aligned}$$

[Einfacher ist:

$$\begin{aligned}(f^k)'(x_0) &= (f^{k-1} \circ f)'(x_0) = (f^{k-1})'(f(x_0)) \circ f'(x_0),\\ (f^k)'(f(x_0)) &= (f \circ f^{k-1})'(f(x_0)) = f'(f^{k-1}(f(x_0))) \circ (f^{k-1})'(f(x_0)))\\ &= f'(f^k(x_0)) \circ (f^{k-1})'(f(x_0)) = f'(x_0) \circ (f^{k-1})'(f(x_0)),\end{aligned}$$

und damit

$$\det(f^k)'(x_0) = \det\left[(f^{k-1})'(f(x_0)) \circ f'(x_0)\right] = \det\left[f'(x_0) \circ (f^{k-1})'(f(x_0))\right]$$
$$= \det(f^k)'(f(x_0)). \qquad]$$

Aufgabe 32: (4 Punkte) Bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, d.h. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

a) Sei $b \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = \langle a, x \rangle + b$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist mit $f'(x_0)v = \langle a, v \rangle, v \in \mathbb{R}^n$.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reellwertige Matrix. Es bezeichne A^T die zu A transponierte Matrix. Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist mit $f'(x_0)v = \langle Ax_0 + A^T x_0, v \rangle, v \in \mathbb{R}^n$.

Lösungsvorschlag: a) Man hat, durch Linearität des Skalarprodukts, daß

$$\begin{aligned}\left|f(x) - f(x_0) - \langle a, x - x_0 \rangle\right| &= \left|(\langle a, x \rangle + b) - (\langle a, x_0 \rangle + b) - \langle a, x - x_0 \rangle\right| \\ &= \left|\langle a, x - x_0 \rangle - \langle a, x - x_0 \rangle\right| = 0,\end{aligned}$$

und $h : v \mapsto \langle a, v \rangle$ *ist* eine Homomorphismus, $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Also ist (VII 1.1. Def.) f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und $f'(x_0)v = \langle a, v \rangle$, $v \in \mathbb{R}^n$.

b) Fast gleich bekommt man (unter verwendung von $\langle A^T x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ und $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, Linearität des Skalarprodukts, und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz), daß

$$\begin{aligned}&\left|f(x) - f(x_0) - \langle Ax_0 + A^T x_0, x - x_0 \rangle\right| \\ &= \left|\langle Ax, x \rangle - \langle Ax_0, x_0 \rangle - \langle Ax_0, x \rangle + \langle Ax_0, x_0 \rangle - \langle A^T x_0, x \rangle + \langle A^T x_0, x_0 \rangle\right| \\ &= \left|\langle Ax, x \rangle - \langle Ax_0, x \rangle + \langle A^T x_0, x_0 \rangle - \langle A^T x_0, x \rangle\right| \\ &= \left|\langle Ax, x \rangle - \langle Ax_0, x \rangle + \langle x_0, Ax_0 \rangle - \langle x_0, Ax \rangle\right| \\ &= \left|\langle Ax - Ax_0, x \rangle + \langle x_0, Ax_0 - Ax \rangle\right| = \left|\langle x, Ax - Ax_0 \rangle + \langle x_0, Ax_0 - Ax \rangle\right| \\ &= \left|\langle x_0, Ax_0 - Ax \rangle - \langle x, Ax_0 - Ax \rangle\right| = \left|\langle x_0 - x, A(x_0 - x) \rangle\right| \\ &\leq |x_0 - x| \cdot |A(x_0 - x)|.\end{aligned}$$

Behauptung:

$$|Av| \leq n(\max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|)|v|.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}|Av|^2 = \langle Av, Av \rangle &= \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j)^2 \leq \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n [\max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|]|v_j|)^2 \\ &= n(\max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|)^2 (\sum_{j=1}^n |v_j|)^2 = n(\max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|)^2 \Big\{\langle (|v_1|, \ldots, |v_n|), (1, \ldots, 1) \rangle\Big\}^2 \\ &\leq n(\max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|)^2 |v|^2 |(1, \ldots, 1)|^2 = n^2 (\max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|)^2 |v|^2\end{aligned}$$

Also folgt (mit $\delta := \min\left\{\frac{\epsilon}{n(\max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|)}, 1\right\}$),

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0) - \langle Ax_0 + A^T x_0, x - x_0 \rangle\right| \leq \epsilon |x - x_0|,$$

und $h : v \mapsto \langle Ax_0 + A^T x_0, v \rangle$ *ist* eine Homomorphismus,, $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Also ist (VII 1.1. Def.) f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und $f'(x_0)v = \langle Ax_0 + A^T x_0, v \rangle$, $v \in \mathbb{R}^n$.

Abgabe bis Montag 13.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.

Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` **sind die Blätter im Internet abrufbar.**

Sprechstunden:	**H. Steinlein:**	**Mo 10-11, Zimmer 318**
	T. Sørensen:	**Mi 14-15, Zimmer 335**