Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein 06.06.2005

Übungsblatt 8 zu MPIIA

Aufgabe 29: (4 Punkte) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante der Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) &\mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) \end{aligned}$$

Aufgabe 30: (4 Punkte) Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, daß die kritischen Punkte, d.h. die Punkte mit verschwindendem Gradienten, der Funktion

$$R : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \ , \ R(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{|x|^2},$$

genau die Eigenvektoren von A sind.

Aufgabe 31: (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ mit

$$f^k(x_0) := (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k})(x_0) = x_0.$$

Sei f in $x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0) \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar. Zeigen Sie, daß

$$\det\big((f^k)'(x_0)\big) = \det\big((f^k)'(f(x_0))\big).$$

Hinweis: Kettenregel.

Aufgabe 32: (4 Punkte) Bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, d.h. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

a) Sei $b \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = \langle a, x \rangle + b$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist mit $f'(x_0)v = \langle a, v \rangle, v \in \mathbb{R}^n$.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reellwertige Matrix. Es bezeichne A^T die zu A transponierte Matrix. Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist mit $f'(x_0)v = \langle Ax_0 + A^T x_0, v \rangle, v \in \mathbb{R}^n$.

Abgabe bis Montag 13.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` **sind die Blätter im Internet abrufbar.**

Sprechstunden:	**H. Steinlein:**	**Mo 10-11, Zimmer 318**
	T. Sørensen:	**Mi 14-15, Zimmer 335**