Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein 30.05.2005

Übungsblatt 7 zu MPIIA

Aufgabe 25: (4 Punkte) Sei V die Menge aller (reellen) Nullfolgen,

$$V = \{a = (a_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_j) \to 0\},$$

und sei

$$\|a\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| \quad \text{für} \quad a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in V.$$

Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm und $(V, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist.
Lösungsvorschlag: V ist ein Vektorraum: Mit

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ \big((a_j), (b_j)\big) &\mapsto (a_j) + (b_j) := (a_j + b_j) \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\to V \\ \big(\lambda, (a_j)\big) &\mapsto \lambda \cdot (a_j) := (\lambda a_j) \end{aligned}$$

erfüllt V die Axiomen für einen Vektorraum (durch die Eigenschaften von $\mathbb{R}$, und weil die Summe zwei Nullfolgen eine Nullfolge ist, und ein Skalar mal eine Nullfolge eine Nullfolge ist). Das Nullelement (Die Nullvektor) ist die Folge $0 := (0, 0, \dots)$.

Offentsichtlich ist $\|a\|_\infty \geq 0$ (weil $|a_j| \geq 0$ für alle j), und

$$a = (0, 0, \dots) \Rightarrow |a_j| = 0 \,\forall j \Rightarrow \|a\|_\infty = \sup_j |a_j| = 0,$$

und

$$\|a\|_\infty = 0 \Rightarrow 0 \leq |a_j| \leq \sup_k |a_k| = 0 \,\forall j \Rightarrow a_j = 0 \,\forall j \Rightarrow a = (0, 0, \dots).$$

Mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_j) \in V$ gilt

$$\|\lambda a\|_\infty = \|(\lambda a_j)\|_\infty = \sup_j |\lambda a_j| = \sup_j \big(|\lambda|\,|a_j|\big) = |\lambda| \sup_j |a_j| = |\lambda|\,\|a\|_\infty.$$

(Hier wurde verwendet, daß $\sup\{st | t \in A \subset \mathbb{R}^+\} = s \cdot \sup\{t | t \in A \subset \mathbb{R}^+\}$).Sei endlich $k \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \big(\sup_j |a_j|\big) + \big(\sup_j |b_j|\big) = \|a\|_\infty + \|b\|_\infty,$$

und damit auch $\sup_k |a_k + b_k| \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$, also ist $\|a + b\|_\infty \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$. Insgesamt gilt

$$\begin{aligned} &i)\ \|a\|_\infty \geq 0;\ \|a\|_\infty = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ &ii)\ \|\lambda a\|_\infty = |\lambda|\,\|a\|_\infty,\ \lambda \in \mathbb{R}, a \in V \\ &iii)\ \|a + b\|_\infty \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty,\ a, b \in V. \end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm.

Sei jetzt $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Cauchyfolge, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow \|a^n - a^m\|_\infty < \epsilon. \tag{1}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, und N gewählt, so daß (1) gilt, und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt, für $n, m \geq N$ (mit $a^n = (a_1^n, a_2^n, a_3^n, \ldots)$)

$$|a_k^n - a_k^m| \leq \sup_j |a_j^n - a_j^m| = \|a^n - a^m\|_\infty < \epsilon, \tag{2}$$

also ist, für jedes $k \in \mathbb{N}$, $\{a_k^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge, und (weil $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist) damit konvergent. Sei, für $k \in \mathbb{N}$, $a_k := \lim_{n\to\infty} a_k^n$. Dann ist $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ eine Folge. Wir werden zeigen, daß $a \in V$, und daß $a^n \to a$ *in* $\|\cdot\|_\infty$ (d.h., $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \|a^n - a\|_\infty \leq \epsilon$).

Dazu bemerkt man, aus (2), daß für jedes $k \in \mathbb{N}$, und für $m \geq N$ *fix*, gilt, für jedes $n \geq m$, daß $|a_k^n - a_k^m| < \epsilon$, und, als

$$a_k = \lim_{n\to\infty} a_k^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_k^n - a_k^m| = |\lim_{n\to\infty} a_k^n - a_k^m| = |a_k - a_k^m|$$

folgt daß $|a_k - a_k^m| \leq \epsilon$. Also:

$$\begin{aligned}
&\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m \geq N \Rightarrow |a_k - a_k^m| \leq \epsilon \ \forall k \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow &\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m \geq N \Rightarrow \sup_k |a_k - a_k^m| \leq \epsilon \\
\Rightarrow &\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m \geq N \Rightarrow \|a - a^m\|_\infty \leq \epsilon. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Aus

$$|a_k| = |a_k - a_k^m + a_k^m| \leq |a_k - a_k^m| + |a_k^m| \leq \|a - a^m\|_\infty + |a_k^m|$$

und (3) folgt dann, weil $a_k^m \to 0, k \to \infty$, daß auch $a_k \to 0, k \to \infty$, und damit $a \in V$. Aus (3) folgt dann, daß $\|a - a^m\|_\infty \to 0, m \to \infty$, d.h., $a^m \to a$ in $(V, \|\cdot\|_\infty)$. Damit ist jede Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|_\infty)$ konvergent, und damit ist $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Aufgabe 26: (4 Punkte) Sei (M, d) kompakter metrischer Raum, und sei $f : M \to M$ stetig mit

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \text{ für alle } x, y \in M\,,\ x \neq y.$$

Zeigen Sie, daß f einen eindeutigen Fixpunkt hat. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto d(x, f(x))$).

Lösungsvorschlag: Betrachte $x \mapsto d(x, f(x))$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung bekommt man

$$\begin{aligned}
d(x, f(x)) &\leq d(x, y) + d(y, f(x)) \leq d(x, y) + d(y, f(y)) + d(f(y), f(x)) \\
&< d(x, y) + d(y, f(y)) + d(x, y) \Rightarrow d(x, f(x)) - d(y, f(y)) < 2d(x, y).
\end{aligned}$$

Ähnlich, $d(y, f(y)) - d(x, f(x)) < 2d(x, y)$, also

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow \big|d(x, f(x)) - d(y, f(y))\big| < \epsilon,$$

also ist $x \mapsto d(x, f(x))$ (gleichmässig) stetig auf M; weil M kompakt ist, hat $x \mapsto d(x, f(x))$ einen Minimum. Sei $x_0 \in M$ mit

$$d(x_0, f(x_0)) \leq d(x, f(x)) \quad \text{für alle } x \in M. \tag{4}$$

Für $x \neq y$ gilt $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, also insbesonders

$$d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) \tag{5}$$

ausser wenn $x_0 = f(x_0)$. Als (5) wiederspruch zu (4) ist, muss gelten $x_0 = f(x_0)$.

Aufgabe 27: (4 Punkte) Sei $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist stetig }\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx\,,\ f, g \in C[0,1]$$

versehen. Sei $f_n(x) = e^{nx}, x \in [0,1], n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Berechnen Sie $\langle f_n, f_m\rangle$ für $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

b) Bilden Sie ein Orthonormalsystem aus $\{f_0, f_1, f_2\}$. (Hinweis: Gram-Schmidtverfahren).

Lösungsvorschlag: a) Für $n + m \neq 0$:

$$\begin{aligned}\langle f_n, f_m\rangle &= \int_0^1 f_n(x) f_m(x)\,dx = \int_0^1 e^{nx}e^{mx}\,dx = \int_0^1 e^{(n+m)x}\,dx \\ &= \Big[\frac{1}{n+m}e^{(n+m)x}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+m}\big(e^{n+m}-1\big).\end{aligned}$$

$n + m = 0 \Rightarrow n = m = 0$;

$$\langle f_0, f_0\rangle = \int_0^1 e^{0\cdot x}e^{0\cdot x}\,dx = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1.$$

Also bekommt man

$$\langle f_n, f_m\rangle = \begin{cases} \frac{1}{n+m}\big(e^{n+m}-1\big), & n+m \neq 0 \\ \quad 1\ , & n = m = 0 \end{cases}.$$

b) Aus a) folgt $\|f_0\| = \sqrt{\langle f_0, f_0\rangle} = 1$. Sei $e_0 := f_0$, und sei

$$\tilde{e}_1 := f_1 - \langle e_0, f_1\rangle e_0 = f_1 - \langle f_0, f_1\rangle f_0 = f_1 - (e-1)f_0.$$

(Die letzte Gleichung folgt aus a)). Dann ist (aus Linearität des Skalarproduktes, und aus a))

$$\begin{aligned}\|\tilde{e}_1\|^2 &= \langle f_1 - (e-1)f_0, f_1 - (e-1)f_0\rangle = \langle f_1, f_1\rangle + (e-1)^2\langle f_0, f_0\rangle - 2(e-1)\langle f_1, f_0\rangle \\ &= \frac{1}{2}(e^2-1) + (e-1)^2 - 2(e-1)(e-1) = \frac{1}{2}(4e-3-e^2).\end{aligned}$$

Sei

$$e_1 := \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4e-3-e^2}}\big(f_1 - (e-1)f_0\big).$$

Dann ist $\|e_1\| = 1, \langle e_1, e_0\rangle = 0$. Sei (mit $c := \frac{1}{2}(4e-3-e^2)$)

$$\begin{aligned}\tilde{e}_2 :&= f_2 - \langle e_1, f_2\rangle e_1 - \langle e_0, f_2\rangle e_0 \\ &= f_2 - \langle \frac{1}{\sqrt{c}}(f_1 - (e-1)f_0, f_2\rangle\big(\frac{1}{\sqrt{c}}(f_1 - (e-1)f_0\big) - \langle f_0, f_2\rangle f_0 \\ &= f_2 - \frac{1}{c}\Big\{\langle f_1, f_2\rangle f_1 - (e-1)\langle f_1, f_2\rangle f_0 - (e-1)\langle f_0, f_2\rangle f_1 + (e-1)^2\langle f_0, f_2\rangle f_0\Big\} \\ &\qquad - \langle f_0, f_2\rangle f_0 \\ &= f_2 - \frac{1}{c}\Big\{\big[\frac{1}{3}(e^3-1) - (e-1)\cdot\frac{1}{2}(e^2-1)\big]f_1 \\ &\qquad + \big[(e-1)^2\cdot\frac{1}{2}(e^2-1) - (e-1)\cdot\frac{1}{3}(e^3-1)\big]f_0\Big\} - \frac{1}{2}(e^2-1)f_0 \\ &= f_2 - \frac{1}{6c}\Big\{\big[-e^3+3e^2+3e-5\big]f_1 + \big[(e^4-4e^3+8e-5) + 3c(e^2-1)\big]f_0\Big\}\end{aligned}$$

Aufgabe 28: (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent sind. (Hinweis: Vergleichen Sie mit $|x|_\infty := \max_{1\le j\le n}|x_j|, x = (x_1, \ldots, x_n)$. Zeigen Sie die Stetigkeit von $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty) \to \mathbb{R}$ und betrachten Sie $\|\cdot\|(S)$, wobei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\infty = 1\}$).

Lösungsvorschlag: Sei $\{e_1,\dots,e_n\}$ die kanonische Basis für $\mathbb{R}^n$, und sei $x\in\mathbb{R}^n$. Dann gilt (weil $\|\cdot\|$ eine Norm ist)

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|\sum_{i=1}^n x_ie_i\| \le \sum_{i=1}^n \|x_ie_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| \le c\sum_{i=1}^n |x_i|\ ,\ c=\max\{\|e_1\|,\dots,\|e_n\|\},\\ &\le c\sum_{i=1}^n(\max_{1\le j\le n}|x_j|) = cn\max_{1\le j\le n}|x_j| = cn|x|_\infty. \end{aligned}\tag{6}$$

Also gilt $\|x_1-x_2\|\le\tilde c|x_1-x_2|_\infty$, und damit ist $\|\cdot\|:(\mathbb{R}^n,|\cdot|_\infty)\to\mathbb{R}$ stetig ($\forall\epsilon>0\exists\delta>0:$ $|x_1-x_2|_\infty<\delta\Rightarrow\|x_1-x_2\|_\infty<\epsilon$).

Man bemerkt folgendes: Für $x\in\mathbb{R}^n$ gilt

$$|x|^2=\sum_{i=1}^n|x_i|^2\le\sum_{i=1}^n(\max_{1\le j\le n}|x_j|)^2=n\cdot(\max_{1\le j\le n}|x_j|)^2=n\cdot(|x|_\infty)^2,$$

und damit $|x|\le\sqrt{n}|x|_\infty$. Auf der andere Seite,

$$|x|_\infty^2=(\max_{1\le j\le n}|x_j|)^2=\max_{1\le j\le n}(|x_j|^2)\le\sum_{i=1}^n|x_i|^2=|x|^2,\tag{7}$$

und damit $|x|_\infty\le|x|$. Also sind $|\cdot|_\infty$ und $|\cdot|$ äquivalente Normen. Die Menge S ist $|\cdot|$-beschränkt ($|x|_\infty=1\Rightarrow|x|\le\sqrt{n}$) und $|\cdot|$-abgeschlossen (durch (7) ist $|\cdot|_\infty:(\mathbb{R}^n,|\cdot|)\to\mathbb{R}$ stetig, und damit $S=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|_\infty=1\}=\big(|\cdot|_\infty\big)^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen, weil $\{1\}\subset\mathbb{R}$ abgeschlossen ist). Weil $|\cdot|_\infty$ und $|\cdot|$ äquivalent sind, und S $|\cdot|$-kompakt ist (Heine-Borel), ist S auch $|\cdot|_\infty$-kompakt. Weil $\|\cdot\|:(\mathbb{R}^n,|\cdot|_\infty)\to\mathbb{R}$ stetig ist, und S $|\cdot|_\infty$-kompakt ist, hat $\|\cdot\|:(\mathbb{R}^n,|\cdot|_\infty)\to\mathbb{R}$ ein Minimum auf S, d.h., es gibt $x_0\in S$ mit $\|x_0\|\le\|x\|$ für alle $x\in S$. Es gilt $\|x_0\|\ne0$ (weil $\|x_0\|=0\Rightarrow x_0=0\notin S$). Sei jetzt $x\in\mathbb{R}^n$, dann gilt $y:=\frac{x}{|x|_\infty}\in S$ (weil $|y|_\infty=1$), und damit $\|y\|\ge\|x_0\|$. D.h.,

$$\|x_0\|\le\|y\|=\|\frac{x}{|x|_\infty}\|=\frac{\|x\|}{|x|_\infty}\Rightarrow|x|_\infty\le C\|x\|\ ,\ C=\frac{1}{\|x_0\|}.\tag{8}$$

Aus (6) und (8) folgt, daß

$$\exists c_1,c_2>0:\ c_1\|x\|\le|x|_\infty\le c_2\|x\|,$$

also sind $|\cdot|_\infty$ und $\|\cdot\|$ äquivalente normen. Gleiche Beweis gibt daß $|||\cdot|||$ und $|\cdot|_\infty$ äquivalent sind, und damit sind auch $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent.

Abgabe bis Montag 06.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.

Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` **sind die Blätter im Internet abrufbar.**

Sprechstunden:	**H. Steinlein:**	**Mo 10-11, Zimmer 318**
	T. Sørensen:	**Mi 14-15, Zimmer 335**