

Übungsblatt 7 zu MPIIA

Aufgabe 25: (4 Punkte) Sei V die Menge aller (reellen) Nullfolgen,

$$V = \{a = (a_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_j) \rightarrow 0\},$$

und sei

$$\|a\|_{\infty} = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \quad \text{für } a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in V.$$

Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_{\infty}$ eine Norm und $(V, \|\cdot\|_{\infty})$ vollständig ist.

Lösungsvorschlag: V ist ein Vektorraum: Mit

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ ((a_j), (b_j)) &\mapsto (a_j) + (b_j) := (a_j + b_j) \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V \\ (\lambda, (a_j)) &\mapsto \lambda \cdot (a_j) := (\lambda a_j) \end{aligned}$$

erfüllt V die Axiome für einen Vektorraum (durch die Eigenschaften von \mathbb{R} , und weil die Summe zwei Nullfolgen eine Nullfolge ist, und ein Skalar mal eine Nullfolge eine Nullfolge ist). Das Nullelement (Die Nullvektor) ist die Folge $0 := (0, 0, \dots)$.

Offensichtlich ist $\|a\|_{\infty} \geq 0$ (weil $|a_j| \geq 0$ für alle j), und

$$a = (0, 0, \dots) \Rightarrow |a_j| = 0 \forall j \Rightarrow \|a\|_{\infty} = \sup_j |a_j| = 0,$$

und

$$\|a\|_{\infty} = 0 \Rightarrow 0 \leq |a_j| \leq \sup_k |a_k| = 0 \forall j \Rightarrow a_j = 0 \forall j \Rightarrow a = (0, 0, \dots).$$

Mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_j) \in V$ gilt

$$\|\lambda a\|_{\infty} = \|(\lambda a_j)\|_{\infty} = \sup_j |\lambda a_j| = \sup_j (|\lambda| |a_j|) = |\lambda| \sup_j |a_j| = |\lambda| \|a\|_{\infty}.$$

(Hier wurde verwendet, daß $\sup\{st \mid t \in A \subset \mathbb{R}^+\} = s \cdot \sup\{t \mid t \in A \subset \mathbb{R}^+\}$). Sei endlich $k \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq (\sup_j |a_j|) + (\sup_j |b_j|) = \|a\|_{\infty} + \|b\|_{\infty},$$

und damit auch $\sup_k |a_k + b_k| \leq \|a\|_{\infty} + \|b\|_{\infty}$, also ist $\|a + b\|_{\infty} \leq \|a\|_{\infty} + \|b\|_{\infty}$. Insgesamt gilt

- i) $\|a\|_{\infty} \geq 0$; $\|a\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- ii) $\|\lambda a\|_{\infty} = |\lambda| \|a\|_{\infty}$, $\lambda \in \mathbb{R}, a \in V$
- iii) $\|a + b\|_{\infty} \leq \|a\|_{\infty} + \|b\|_{\infty}$, $a, b \in V$.

Also ist $\|\cdot\|_{\infty}$ eine Norm.

Sei jetzt $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ eine Cauchyfolge, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow \|a^n - a^m\|_{\infty} < \epsilon. \quad (1)$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, und N gewählt, so daß (1) gilt, und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt, für $n, m \geq N$ (mit $a^n = (a_1^n, a_2^n, a_3^n, \dots)$)

$$|a_k^n - a_k^m| \leq \sup_j |a_j^n - a_j^m| = \|a^n - a^m\|_\infty < \epsilon, \quad (2)$$

also ist, für jedes $k \in \mathbb{N}$, $\{a_k^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge, und (weil $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist) damit konvergent. Sei, für $k \in \mathbb{N}$, $a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^n$. Dann ist $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ eine Folge. Wir werden zeigen, daß $a \in V$, und daß $a^n \rightarrow a$ in $\|\cdot\|_\infty$ (d.h., $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \|a^n - a\|_\infty \leq \epsilon$).

Dazu bemerkt man, aus (2), daß für jedes $k \in \mathbb{N}$, und für $m \geq N$ fix, gilt, für jedes $n \geq m$, daß $|a_k^n - a_k^m| < \epsilon$, und, als

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_k^n - a_k^m| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_k^n - a_k^m| = |a_k - a_k^m|$$

folgt daß $|a_k - a_k^m| \leq \epsilon$. Also:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m \geq N \Rightarrow |a_k - a_k^m| &\leq \epsilon \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m \geq N \Rightarrow \sup_k |a_k - a_k^m| &\leq \epsilon \\ \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m \geq N \Rightarrow \|a - a^m\|_\infty &\leq \epsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

Aus

$$|a_k| = |a_k - a_k^m + a_k^m| \leq |a_k - a_k^m| + |a_k^m| \leq \|a - a^m\|_\infty + |a_k^m|$$

und (3) folgt dann, weil $a_k^m \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, daß auch $a_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, und damit $a \in V$. Aus (3) folgt dann, daß $\|a - a^m\|_\infty \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, d.h., $a^m \rightarrow a$ in $(V, \|\cdot\|_\infty)$. Damit ist jede Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|_\infty)$ konvergent, und damit ist $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Aufgabe 26: (4 Punkte) Sei (M, d) kompakter metrischer Raum, und sei $f : M \rightarrow M$ stetig mit

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \text{ für alle } x, y \in M, \quad x \neq y.$$

Zeigen Sie, daß f einen eindeutigen Fixpunkt hat. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto d(x, f(x))$).

Lösungsvorschlag: Betrachte $x \mapsto d(x, f(x))$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung bekommt man

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &\leq d(x, y) + d(y, f(x)) \leq d(x, y) + d(y, f(y)) + d(f(y), f(x)) \\ &< d(x, y) + d(y, f(y)) + d(x, y) \Rightarrow d(x, f(x)) - d(y, f(y)) < 2d(x, y). \end{aligned}$$

Ähnlich, $d(y, f(y)) - d(x, f(x)) < 2d(x, y)$, also

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow |d(x, f(x)) - d(y, f(y))| < \epsilon,$$

also ist $x \mapsto d(x, f(x))$ (gleichmäßig) stetig auf M ; weil M kompakt ist, hat $x \mapsto d(x, f(x))$ ein Minimum. Sei $x_0 \in M$ mit

$$d(x_0, f(x_0)) \leq d(x, f(x)) \text{ für alle } x \in M. \quad (4)$$

Für $x \neq y$ gilt $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, also insbesondere

$$d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) \quad (5)$$

außer wenn $x_0 = f(x_0)$. Als (5) Widerspruch zu (4) ist, muss gelten $x_0 = f(x_0)$.

Aufgabe 27: (4 Punkte) Sei $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig} \}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in C[0, 1]$$

versehen. Sei $f_n(x) = e^{nx}, x \in [0, 1], n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Berechnen Sie $\langle f_n, f_m \rangle$ für $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

b) Bilden Sie ein Orthonormalsystem aus $\{f_0, f_1, f_2\}$. (Hinweis: Gram-Schmidtverfahren).

Lösungsvorschlag: a) Für $n + m \neq 0$:

$$\begin{aligned}\langle f_n, f_m \rangle &= \int_0^1 f_n(x) f_m(x) dx = \int_0^1 e^{nx} e^{mx} dx = \int_0^1 e^{(n+m)x} dx \\ &= \left[\frac{1}{n+m} e^{(n+m)x} \right]_0^1 = \frac{1}{n+m} (e^{n+m} - 1).\end{aligned}$$

$n + m = 0 \Rightarrow n = m = 0$;

$$\langle f_0, f_0 \rangle = \int_0^1 e^{0 \cdot x} e^{0 \cdot x} dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1.$$

Also bekommt man

$$\langle f_n, f_m \rangle = \begin{cases} \frac{1}{n+m} (e^{n+m} - 1), & n + m \neq 0 \\ 1, & n = m = 0 \end{cases}.$$

b) Aus a) folgt $\|f_0\| = \sqrt{\langle f_0, f_0 \rangle} = 1$. Sei $e_0 := f_0$, und sei

$$\tilde{e}_1 := f_1 - \langle e_0, f_1 \rangle e_0 = f_1 - \langle f_0, f_1 \rangle f_0 = f_1 - (e - 1)f_0.$$

(Die letzte Gleichung folgt aus a)). Dann ist (aus Linearität des Skalarproduktes, und aus a))

$$\begin{aligned}\|\tilde{e}_1\|^2 &= \langle f_1 - (e - 1)f_0, f_1 - (e - 1)f_0 \rangle = \langle f_1, f_1 \rangle + (e - 1)^2 \langle f_0, f_0 \rangle - 2(e - 1) \langle f_1, f_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2}(e^2 - 1) + (e - 1)^2 - 2(e - 1)(e - 1) = \frac{1}{2}(4e - 3 - e^2).\end{aligned}$$

Sei

$$e_1 := \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4e - 3 - e^2}} (f_1 - (e - 1)f_0).$$

Dann ist $\|e_1\| = 1$, $\langle e_1, e_0 \rangle = 0$. Sei (mit $c := \frac{1}{2}(4e - 3 - e^2)$)

$$\begin{aligned}\tilde{e}_2 &:= f_2 - \langle e_1, f_2 \rangle e_1 - \langle e_0, f_2 \rangle e_0 \\ &= f_2 - \left\langle \frac{1}{\sqrt{c}} (f_1 - (e - 1)f_0), f_2 \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{c}} (f_1 - (e - 1)f_0) \right) - \langle f_0, f_2 \rangle f_0 \\ &= f_2 - \frac{1}{c} \left\{ \langle f_1, f_2 \rangle f_1 - (e - 1) \langle f_1, f_2 \rangle f_0 - (e - 1) \langle f_0, f_2 \rangle f_1 + (e - 1)^2 \langle f_0, f_2 \rangle f_0 \right\} \\ &\quad - \langle f_0, f_2 \rangle f_0 \\ &= f_2 - \frac{1}{c} \left\{ \left[\frac{1}{3}(e^3 - 1) - (e - 1) \cdot \frac{1}{2}(e^2 - 1) \right] f_1 \right. \\ &\quad \left. + [(e - 1)^2 \cdot \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e - 1) \cdot \frac{1}{3}(e^3 - 1)] f_0 \right\} - \frac{1}{2}(e^2 - 1)f_0 \\ &= f_2 - \frac{1}{6c} \left\{ [-e^3 + 3e^2 + 3e - 5] f_1 + [(e^4 - 4e^3 + 8e - 5) + 3c(e^2 - 1)] f_0 \right\}\end{aligned}$$

Aufgabe 28: (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent sind. (Hinweis: Vergleichen Sie mit $|x|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Zeigen Sie die Stetigkeit von $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und betrachten Sie $\|\cdot\|(S)$, wobei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\infty = 1\}$).

Lösungsvorschlag: Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis für \mathbb{R}^n , und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt (weil $\|\cdot\|$ eine Norm ist)

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq c \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad c = \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\}, \\ &\leq c \sum_{i=1}^n \left(\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right) = cn \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = cn |x|_\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Also gilt $\|x_1 - x_2\| \leq \tilde{c} |x_1 - x_2|_\infty$, und damit ist $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ($\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2|_\infty < \delta \Rightarrow \|x_1 - x_2\| < \epsilon$).

Man bemerkt folgendes: Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right)^2 = n \cdot \left(\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right)^2 = n \cdot (|x|_\infty)^2,$$

und damit $|x| \leq \sqrt{n} |x|_\infty$. Auf der andere Seite,

$$|x|_\infty^2 = \left(\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right)^2 = \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j|^2) \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = |x|^2, \quad (7)$$

und damit $|x|_\infty \leq |x|$. Also sind $|\cdot|_\infty$ und $|\cdot|$ äquivalente Normen. Die Menge S ist $|\cdot|$ -beschränkt ($|x|_\infty = 1 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{n}$) und $|\cdot|$ -abgeschlossen (durch (7) ist $|\cdot|_\infty : (\mathbb{R}^n, |\cdot|) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und damit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_\infty = 1\} = (|\cdot|_\infty)^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen, weil $\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist). Weil $|\cdot|_\infty$ und $|\cdot|$ äquivalent sind, und S $|\cdot|$ -kompakt ist (Heine-Borel), ist S auch $|\cdot|_\infty$ -kompakt. Weil $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, und S $|\cdot|_\infty$ -kompakt ist, hat $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Minimum auf S , d.h., es gibt $x_0 \in S$ mit $\|x_0\| \leq \|x\|$ für alle $x \in S$. Es gilt $\|x_0\| \neq 0$ (weil $\|x_0\| = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \notin S$). Sei jetzt $x \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $y := \frac{x}{|x|_\infty} \in S$ (weil $|y|_\infty = 1$), und damit $\|y\| \geq \|x_0\|$. D.h.,

$$\|x_0\| \leq \|y\| = \left\| \frac{x}{|x|_\infty} \right\| = \frac{\|x\|}{|x|_\infty} \Rightarrow |x|_\infty \leq C \|x\|, \quad C = \frac{1}{\|x_0\|}. \quad (8)$$

Aus (6) und (8) folgt, daß

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|x\| \leq |x|_\infty \leq c_2 \|x\|,$$

also sind $|\cdot|_\infty$ und $\|\cdot\|$ äquivalente normen. Gleiche Beweis gibt daß $|||\cdot|||$ und $|\cdot|_\infty$ äquivalent sind, und damit sind auch $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent.

Abgabe bis Montag 06.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.

Unter <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen> sind die Blätter im Internet abrufbar.

Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335