Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein 30.05.2005

Übungsblatt 7 zu MPIIA

Aufgabe 25: (4 Punkte) Sei V die Menge aller (reellen) Nullfolgen,

$$V = \{a = (a_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_j) \to 0\},$$

und sei

$$\|a\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| \quad \text{für} \quad a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in V.$$

Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm und $(V, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist.
Lösungsvorschlag: V ist ein Vektorraum: Mit

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ \big((a_j), (b_j)\big) &\mapsto (a_j) + (b_j) := (a_j + b_j) \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\to V \\ \big(\lambda, (a_j)\big) &\mapsto \lambda \cdot (a_j) := (\lambda a_j) \end{aligned}$$

erfüllt V die Axiomen für einen Vektorraum (durch die Eigenschaften von $\mathbb{R}$, und weil die Summe zwei Nullfolgen eine Nullfolge ist, und ein Skalar mal eine Nullfolge eine Nullfolge ist). Das Nullelement (Die Nullvektor) ist die Folge $0 := (0, 0, \ldots)$.

Offentsichtlich ist $\|a\|_\infty \geq 0$ (weil $|a_j| \geq 0$ für alle j), und weil $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ eine Nullfolge ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ (N hängt natürlich von a ab), so daß $j \geq N \Rightarrow |a_n| \leq |a_1|/2$. Damit ist $\sup_j |a_j| = \max_{1\leq j\leq N} |a_j| < \infty$, also gilt $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$. Weiter gilt, daß

$$a = (0, 0, \ldots) \Rightarrow |a_j| = 0 \,\forall j \Rightarrow \|a\|_\infty = \sup_j |a_j| = 0,$$

und

$$\|a\|_\infty = 0 \Rightarrow 0 \leq |a_j| \leq \sup_k |a_k| = 0 \,\forall j \Rightarrow a_j = 0 \,\forall j \Rightarrow a = (0, 0, \ldots).$$

Mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_j) \in V$ gilt

$$\|\lambda a\|_\infty = \|(\lambda a_j)\|_\infty = \sup_j |\lambda a_j| = \sup_j \big(|\lambda|\,|a_j|\big) = |\lambda| \sup_j |a_j| = |\lambda|\,\|a\|_\infty.$$

(Hier wurde verwendet, daß $\sup\{st | t \in A \subset \mathbb{R}^+\} = s \cdot \sup\{t | t \in A \subset \mathbb{R}^+\}$).Sei endlich $k \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \big(\sup_j |a_j|\big) + \big(\sup_j |b_j|\big) = \|a\|_\infty + \|b\|_\infty,$$

und damit auch $\sup_k |a_k + b_k| \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$, also ist $\|a + b\|_\infty \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$. Insgesamt gilt

$$\begin{aligned} &i)\ \|a\|_\infty \geq 0;\ \|a\|_\infty = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ &ii)\ \|\lambda a\|_\infty = |\lambda|\,\|a\|_\infty,\ \lambda \in \mathbb{R}, a \in V \\ &iii)\ \|a + b\|_\infty \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty,\ a, b \in V. \end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm.

Sei jetzt $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Cauchyfolge, d.h.

$$\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow \|a^n - a^m\|_\infty < \epsilon. \tag{1}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, und N gewählt, so daß (1) gilt, und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt, für $n, m \geq N$ (mit $a^n = (a_1^n, a_2^n, a_3^n, \ldots)$)

$$|a_k^n - a_k^m| \leq \sup_j |a_j^n - a_j^m| = \|a^n - a^m\|_\infty < \epsilon, \tag{2}$$

also ist, für jedes $k \in \mathbb{N}$, $\{a_k^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge, und (weil $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist) damit konvergent. Sei, für $k \in \mathbb{N}$, $a_k := \lim_{n\to\infty} a_k^n$. Dann ist $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ eine Folge. Wir werden zeigen, daß $a \in V$, und daß $a^n \to a$ *in* $\|\cdot\|_\infty$ (d.h., $\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \|a^n - a\|_\infty \leq \epsilon$).

Dazu bemerkt man, aus (2), daß für jedes $k \in \mathbb{N}$, und für $m \geq N$ *fix*, gilt, für jedes $n \geq m$, daß $|a_k^n - a_k^m| < \epsilon$, und, weil

$$a_k = \lim_{n\to\infty} a_k^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_k^n - a_k^m| = |\lim_{n\to\infty} a_k^n - a_k^m| = |a_k - a_k^m|$$

folgt daß $|a_k - a_k^m| \leq \epsilon$. Also:

$$\begin{aligned}
&\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m \geq N \Rightarrow |a_k - a_k^m| \leq \epsilon \ \forall k \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow &\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m \geq N \Rightarrow \sup_k |a_k - a_k^m| \leq \epsilon \\
\Rightarrow &\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m \geq N \Rightarrow \|a - a^m\|_\infty \leq \epsilon. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Aus

$$|a_k| = |a_k - a_k^m + a_k^m| \leq |a_k - a_k^m| + |a_k^m| \leq \|a - a^m\|_\infty + |a_k^m|$$

und (3) folgt dann, weil $a_k^m \to 0, k \to \infty$, daß auch $a_k \to 0, k \to \infty$, und damit $a \in V$. Aus (3) folgt dann, daß $\|a - a^m\|_\infty \to 0, m \to \infty$, d.h., $a^m \to a$ in $(V, \|\cdot\|_\infty)$. Damit ist jede Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|_\infty)$ konvergent, und damit ist $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Aufgabe 26: (4 Punkte) Sei (M, d) kompakter metrischer Raum, und sei $f : M \to M$ stetig mit

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \text{ für alle } x, y \in M\,,\ \ x \neq y.$$

Zeigen Sie, daß f einen eindeutigen Fixpunkt hat. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto d(x, f(x))$).

Lösungsvorschlag: Betrachte $x \mapsto d(x, f(x))$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung bekommt man

$$\begin{aligned}
d(x, f(x)) &\leq d(x, y) + d(y, f(x)) \leq d(x, y) + d(y, f(y)) + d(f(y), f(x)) \\
&< d(x, y) + d(y, f(y)) + d(x, y) \Rightarrow d(x, f(x)) - d(y, f(y)) < 2d(x, y).
\end{aligned}$$

Ähnlich, $d(y, f(y)) - d(x, f(x)) < 2d(x, y)$, also

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow \big|d(x, f(x)) - d(y, f(y))\big| < \epsilon,$$

also ist $x \mapsto d(x, f(x))$ (gleichmässig) stetig auf M; weil M kompakt ist, hat $x \mapsto d(x, f(x))$ ein Minimum. Sei $x_0 \in M$ mit

$$d(x_0, f(x_0) \leq d(x, f(x)) \ \text{ für alle } x \in M. \tag{4}$$

Für $x \neq y$ gilt $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, also insbesonders

$$d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) \tag{5}$$

ausser wenn $x_0 = f(x_0)$. Weil (5) wiederspruch zu (4) ist, muss gelten $x_0 = f(x_0)$. Wäre x_1 ein *andere* Fixpunkt ($x_0 \neq x_1$), dann hätte man (weil $x_1 = f(x_1)$,

$$d(x_1, x_0) = d(f(x_1), f(x_0)) < d(x_1, x_0),$$

was ein Wiederspruch wäre.

Aufgabe 27: (4 Punkte) Sei $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig } \}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \ , \ f, g \in C[0,1]$$

versehen. Sei $f_n(x) = e^{nx}, x \in [0,1], n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Berechnen Sie $\langle f_n, f_m \rangle$ für $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

b) Bilden Sie ein Orthonormalsystem aus $\{f_0, f_1, f_2\}$. (Hinweis: Gram-Schmidtverfahren).

Lösungsvorschlag: a) Für $n + m \neq 0$:

$$\begin{aligned}\langle f_n, f_m \rangle &= \int_0^1 f_n(x) f_m(x)\, dx = \int_0^1 e^{nx} e^{mx}\, dx = \int_0^1 e^{(n+m)x}\, dx \\ &= \big[\frac{1}{n+m} e^{(n+m)x}\big]_0^1 = \frac{1}{n+m}\big(e^{n+m} - 1\big).\end{aligned}$$

$n + m = 0 \Rightarrow n = m = 0$;

$$\langle f_0, f_0 \rangle = \int_0^1 e^{0\cdot x} e^{0\cdot x}\, dx = \int_0^1 1\, dx = [x]_0^1 = 1.$$

Also bekommt man

$$\langle f_n, f_m \rangle = \begin{cases} \frac{1}{n+m}\big(e^{n+m} - 1\big), & n + m \neq 0 \\ \quad 1 \ , & n = m = 0 \end{cases}.$$

b) Aus a) folgt $\|f_0\| = \sqrt{\langle f_0, f_0 \rangle} = 1$. Sei $e_0 := f_0$, und sei

$$\tilde{e}_1 := f_1 - \langle e_0, f_1 \rangle e_0 = f_1 - \langle f_0, f_1 \rangle f_0 = f_1 - (e-1) f_0.$$

(Die letzte Gleichung folgt aus a)). Dann ist (aus Linearität des Skalarproduktes, und aus a))

$$\begin{aligned}\|\tilde{e}_1\|^2 &= \langle f_1 - (e-1)f_0, f_1 - (e-1)f_0 \rangle = \langle f_1, f_1 \rangle + (e-1)^2 \langle f_0, f_0 \rangle - 2(e-1)\langle f_1, f_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2}(e^2 - 1) + (e-1)^2 - 2(e-1)(e-1) = \frac{1}{2}(e-1)(3-e) \ (\cong 0{,}24 > 0)\end{aligned}$$

Sei

$$e_1 := \frac{\tilde{e_1}}{\|\tilde{e_1}\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(e-1)(3-1)}}\big(f_1 - (e-1)f_0\big).$$

Dann ist $\|e_1\| = 1, \langle e_1, e_0 \rangle = 0$. Sei (mit $c := \frac{1}{2}(e-1)(3-e)$)

$$\begin{aligned}\tilde{e}_2 :&= f_2 - \langle e_1, f_2 \rangle e_1 - \langle e_0, f_2 \rangle e_0 \\ &= f_2 - \langle \frac{1}{\sqrt{c}}(f_1 - (e-1)f_0), f_2 \rangle \big(\frac{1}{\sqrt{c}}(f_1 - (e-1)f_0)\big) - \langle f_0, f_2 \rangle f_0 \\ &= f_2 - \frac{1}{c}\Big\{\langle f_1, f_2 \rangle f_1 - (e-1)\langle f_1, f_2 \rangle f_0 - (e-1)\langle f_0, f_2 \rangle f_1 + (e-1)^2 \langle f_0, f_2 \rangle f_0\Big\} \\ &\qquad - \langle f_0, f_2 \rangle f_0 \\ &= f_2 - \frac{1}{c}\Big\{\big[\frac{1}{3}(e^3 - 1) - (e-1)\cdot\frac{1}{2}(e^2 - 1)\big] f_1 \\ &\qquad + \big[(e-1)^2 \cdot \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e-1)\cdot\frac{1}{3}(e^3 - 1)\big] f_0\Big\} - \frac{1}{2}(e^2 - 1) f_0 \\ &= f_2 + \frac{1}{3}\frac{e^2 - 2e - 5}{3 - e} f_1 + \frac{1}{6}\frac{(e-1)^3}{3-e} f_0 \\ &\equiv f_2 + c_1 f_1 + c_0 f_0 \ , \ c_0 = \frac{1}{6}\frac{(e-1)^3}{3-e}, \ c_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2 - 2e - 5}{3-e}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{e}_2\|^2 &= \langle f_2 + c_1 f_1 + c_0 f_0, f_2 + c_1 f_1 + c_0 f_0\rangle \\
&= \langle f_2, f_2\rangle + c_1^2\langle f_1, f_1\rangle + c_0^2\langle f_0, f_0\rangle + 2c_1\langle f_2, f_1\rangle + 2c_0\langle f_2, f_0\rangle + 2c_0c_1\langle f_1, f_0\rangle \\
&= \frac{1}{4}(e^4-1) + c_1^2\cdot\frac{1}{2}(e^2-1) + c_0^2\cdot 1 + 2c_1\cdot\frac{1}{3}(e^3-1) + 2c_0\cdot\frac{1}{2}(e^2-1) + 2c_0c_1(e-1) \\
&= \frac{1}{4}(e-1)(e^3+e^2+1) + \frac{1}{18}\frac{(e^2-2e-5)^2}{(3-e)^2}(e-1)(e+1) + \frac{1}{36}\frac{(e-1)^6}{(3-e)^2} \\
&\quad + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\frac{e^2-2e-5}{3-e}(e-1)(e^2+e+1) + \frac{1}{6}\frac{(e-1)^3}{3-e}(e-1)(e+1) \\
&\quad + 2\cdot\frac{1}{6}\frac{(e-1)^3}{3-e}\cdot\frac{1}{3}\frac{e^2-2e-5}{3-e}(e-1) \\
&= \frac{-e^5+5e^4-7e^3+e^2+4e-2}{18(3-e)} = \frac{3(e-1)^3-(e-1)^5}{18(3-e)} \\
e_2 &:= \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \frac{1}{c_2}\big(f_2 + c_1 f_1 + c_0 f_0\big)\ ,\ c_0 = \frac{1}{6}\frac{(e-1)^3}{3-3},\ c_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2-2e-5}{3-e}, \\
&\qquad c_2 = \sqrt{\frac{3(e-1)^3-(e-1)^5}{18(3-e)}} \\
\Rightarrow e_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3-e}}\frac{(e-1)^3 - 2(e^2-2e-5)e^x + 6(3-e)e^{2x}}{\sqrt{3(e-1)^3-(e-1)^5}}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 28: (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent sind. (Hinweis: Vergleichen Sie mit $|x|_\infty := \max_{1\le j\le n}|x_j|, x = (x_1,\ldots,x_n)$. Zeigen Sie die Stetigkeit von $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty) \to \mathbb{R}$ und betrachten Sie $\|\cdot\|(S)$, wobei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x|_\infty = 1\}$).

Lösungsvorschlag: Sei $\{e_1,\ldots,e_n\}$ die kanonische Basis für $\mathbb{R}^n$, und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt (weil $\|\cdot\|$ eine Norm ist)

$$
\begin{aligned}
\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \le \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| \le c\sum_{i=1}^n |x_i|\ ,\ c = \max\{\|e_1\|,\ldots,\|e_n\|\}, \\
\le c\sum_{i=1}^n (\max_{1\le j\le n}|x_j|) = cn\max_{1\le j\le n}|x_j| = cn|x|_\infty. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Also gilt $\|x_1 - x_2\| \le \tilde{c}|x_1 - x_2|_\infty$, und damit ist $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty) \to \mathbb{R}$ stetig ($\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0 : |x_1 - x_2|_\infty < \delta \Rightarrow \|x_1 - x_2\|_\infty < \epsilon$).

Man bemerkt folgendes: Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$
|x|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \le \sum_{i=1}^n (\max_{1\le j\le n}|x_j|)^2 = n\cdot(\max_{1\le j\le n}|x_j|)^2 = n\cdot(|x|_\infty)^2,
$$

und damit $|x| \le \sqrt{n}|x|_\infty$. Auf der andere Seite,

$$
|x|_\infty^2 = (\max_{1\le j\le n}|x_j|)^2 = \max_{1\le j\le n}(|x_j|^2) \le \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = |x|^2, \qquad (7)
$$

und damit $|x|_\infty \le |x|$. Also sind $|\cdot|_\infty$ und $|\cdot|$ äquivalente Normen. Die Menge S ist $|\cdot|$-beschränkt ($|x|_\infty = 1 \Rightarrow |x| \le \sqrt{n}$) und $|\cdot|$-abgeschlossen (durch (7) ist $|\cdot|_\infty : (\mathbb{R}^n, |\cdot|) \to \mathbb{R}$ stetig, und damit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x|_\infty = 1\} = \big(|\cdot|_\infty\big)^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen, weil $\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist). Weil $|\cdot|_\infty$ und $|\cdot|$ äquivalent sind, und S $|\cdot|$-kompakt ist (Heine-Borel), ist S auch $|\cdot|_\infty$-kompakt. Weil $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist, und S $|\cdot|_\infty$-kompakt ist, hat $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty) \to \mathbb{R}$ ein Minimum auf S, d.h., es gibt $x_0 \in S$ mit $\|x_0\| \le \|x\|$ für alle $x \in S$. Es gilt $\|x_0\| \ne 0$ (weil $\|x_0\| = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \notin S$). Sei jetzt $x \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $y := \frac{x}{|x|_\infty} \in S$ (weil $|y|_\infty = 1$), und damit

$\|y\| \geq \|x_0\|$. D.h.,

$$\|x_0\| \leq \|y\| = \Big\|\frac{x}{|x|_\infty}\Big\| = \frac{\|x\|}{|x|_\infty} \Rightarrow |x|_\infty \leq C\|x\| \ , \ C = \frac{1}{\|x_0\|}. \tag{8}$$

Aus (6) und (8) folgt, daß

$$\exists c_1, c_2 > 0 : \ c_1\|x\| \leq |x|_\infty \leq c_2\|x\|,$$

also sind $|\cdot|_\infty$ und $\|\cdot\|$ äquivalente normen. Gleiche Beweis gibt daß $|||\cdot|||$ und $|\cdot|_\infty$ äquivalent sind, und damit sind auch $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent.

Abgabe bis Montag 06.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼sorensen` **sind die Blätter im Internet abrufbar.**

Sprechstunden:	**H. Steinlein:**	**Mo 10-11, Zimmer 318**
	T. Sørensen:	**Mi 14-15, Zimmer 335**