Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein

30.05.2005

Übungsblatt 7 zu MPIIA

Aufgabe 25: (4 Punkte) Sei V die Menge aller (reellen) Nullfolgen,

$$V = \{a = (a_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, (a_j) \to 0\},$$

und sei

$$\|a\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| \quad \text{für} \quad a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in V.$$

Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm und $(V, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist.

Aufgabe 26: (4 Punkte) Sei (M, d) kompakter metrischer Raum, und sei $f : M \to M$ stetig mit

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \text{ für alle } x, y \in M\,,\ x \neq y.$$

Zeigen Sie, daß f einen eindeutigen Fixpunkt hat. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto d(x, f(x))$).

Aufgabe 27: (4 Punkte) Sei $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist stetig }\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx\ ,\ \ f, g \in C[0,1]$$

versehen. Sei $f_n(x) = e^{nx}, x \in [0,1], n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Berechnen Sie $\langle f_n, f_m\rangle$ für $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

b) Bilden Sie ein Orthonormalsystem aus $\{f_0, f_1, f_2\}$. (Hinweis: Gram-Schmidtverfahren).

Aufgabe 28: (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent sind. (Hinweis: Vergleichen Sie mit $|x|_\infty := \max_{1\le j\le n} |x_j|, x = (x_1, \ldots, x_n)$. Zeigen Sie die Stetigkeit von $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty) \to \mathbb{R}$ und betrachten Sie $\|\cdot\|(S)$, wobei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x|_\infty = 1\}$).

Abgabe bis Montag 06.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` sind die Blätter im Internet abrufbar.

Sprechstunden:	**H. Steinlein:**	**Mo 10-11, Zimmer 318**
	T. Sørensen:	**Mi 14-15, Zimmer 335**