

Übungsblatt 7 zu MPIIA

Aufgabe 25: (4 Punkte) Sei V die Menge aller (reellen) Nullfolgen,

$$V = \{a = (a_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (a_j) \rightarrow 0\},$$

und sei

$$\|a\|_{\infty} = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \quad \text{für } a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in V.$$

Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_{\infty}$ eine Norm und $(V, \|\cdot\|_{\infty})$ vollständig ist.

Aufgabe 26: (4 Punkte) Sei (M, d) kompakter metrischer Raum, und sei $f : M \rightarrow M$ stetig mit

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M, \quad x \neq y.$$

Zeigen Sie, daß f einen eindeutigen Fixpunkt hat. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto d(x, f(x))$).

Aufgabe 27: (4 Punkte) Sei $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in C[0, 1]$$

versehen. Sei $f_n(x) = e^{nx}$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Berechnen Sie $\langle f_n, f_m \rangle$ für $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

b) Bilden Sie ein Orthonormalsystem aus $\{f_0, f_1, f_2\}$. (Hinweis: Gram-Schmidtverfahren).

Aufgabe 28: (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent sind. (Hinweis: Vergleichen Sie mit $|x|_{\infty} := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Zeigen Sie die Stetigkeit von $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_{\infty}) \rightarrow \mathbb{R}$ und betrachten Sie $\|\cdot\|(S)$, wobei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|_{\infty} = 1\}$).

Abgabe bis Montag 06.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.

Unter <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen> sind die Blätter im Internet abrufbar.

Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335