Mathematisches Institut LMU 23.05.2005
Prof. Dr. H. Steinlein

Übungsblatt 6 zu MPIIA

Aufgabe 21: (4 Punkte) Es sei (M, d) metrischer Raum und sei $N \subset M$. Wir definieren $d_N := d|_{N\times N}$ als die Einschränkung von d auf $N \times N$. Zeigen Sie zunächst, daß (N, d_N) ein metrischer Raum ist. Wir bezeichnen die von (M, d) bzw. die von (N, d_N) erzeugten Topologien mit τ_M bzw. τ_N. Zeigen Sie:

a) U ist offen bezüglich $\tau_N \Leftrightarrow$ es gibt eine bezüglich τ_M offene Menge V mit $U = V \cap N$.

b) A ist abgeschlossen bezüglich $\tau_N \Leftrightarrow$ es gibt eine bezüglich τ_M abgeschlossene Menge B mit $A = B \cap N$.

Lösungsvorschlag: Sei, für $\epsilon > 0, x \in N, z \in M, K_\epsilon^N(x) := \{y \in N | d_N(x, y) < \epsilon\}, K_\epsilon^M(z) := \{y \in M | d(z, y) < \epsilon\}$. Dann ist $K_\epsilon^N(x) = K_\epsilon^M(x) \cap N$ für $x \in N$.
a) Sei U offen bezüglich τ_N, und $x \in U$. Dann existiert $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ mit $K_\epsilon^N(x) \subset U$. Sei $V := \cup_{x\in U} K_{\epsilon(x)}^M(x)$. Dann ist V offen bezüglich τ_M, als Vereinigung von Mengen $(K_{\epsilon(x)}^M(x))$ die offen sind bezüglich τ_M. Ausserdem ist $U = V \cap N$. Beweis:

$$\begin{aligned} y \in V \cap N &\Rightarrow y \in \bigcup_{x\in U} K_{\epsilon(x)}^M(x) \wedge y \in N \Rightarrow (\exists x \in U : y \in K_{\epsilon(x)}^M(x)) \wedge y \in N \\ &\Rightarrow \exists x \in U : y \in K_{\epsilon(x)}^M(x) \cap N \Rightarrow \exists x \in U : y \in K_{\epsilon(x)}^N(x) \subset U \Rightarrow y \in U; \\ y \in U &\Rightarrow \exists \epsilon(y) > 0 : y \in K_{\epsilon(y)}^N(y) \subset U \Rightarrow y \in N \wedge y \in K_{\epsilon(y)}^M(y) \wedge y \in U \\ &\Rightarrow (y \in \bigcup_{x\in U} K_{\epsilon(x)}^M(x) = V) \wedge y \in N \Rightarrow y \in V \cap N. \end{aligned}$$

Damit folgt "$\Rightarrow$".

Angenommen, es gibt eine bezüglich τ_M offene Menge V mit $U = V \cap N(\subset N)$. Sei $x \in U$. Dann ist $x \in V$, also gibt es $\epsilon > 0$, so daß $K_\epsilon^M(x) \subset V$, und damit ist $K_\epsilon^N(x) \subset V \cap N$ (weil $K_\epsilon^N(x) = K_\epsilon^M(x) \cap N$ für $x \in N$). Also: $\forall x \in U \exists \epsilon > 0 : K_\epsilon^N(x) \subset U$. Damit ist U offen bezüglich τ_N. Damit folgt "$\Leftarrow$".

b) Folgt aus a): A ist abgeschlossen bezüglich $\tau_N \Rightarrow N \setminus A$ ist offen bezüglich $\tau_N \Rightarrow \exists V$, offen bezüglich τ_M, so daß $N \setminus A = V \cap N$ (aus a)). Aber dann ist, mit $B := M \setminus V$, B abgeschlossen bezüglich τ_M, und erfüllt $A = B \cap N$. (Beweis:

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow (x \notin N \setminus A \wedge x \in N) \Rightarrow (x \notin V \cap N \wedge x \in N) \Rightarrow (x \notin V \vee x \notin N) \wedge x \in N \\ &\Rightarrow x \notin V \wedge x \in N \Rightarrow x \in B \ (= M \setminus V) \wedge x \in N \Rightarrow x \in B \cap N; \\ x \in B \cap N &\Rightarrow x \in N \wedge x \in B \Rightarrow x \in N \wedge x \notin V \ (\text{weil } B = M \setminus V) \Rightarrow x \notin N \setminus A \Rightarrow x \in A). \end{aligned}$$

Damit folgt "$\Rightarrow$".

Für "$\Leftarrow$": Sei B abgeschlossen bezüglich τ_M mit $A = B \cap N$. Dann ist $V := M \setminus B$ offen bezüglich τ_M, und $V \cap N = N \setminus A$ (Beweis wie oben). Also ist $V \cap N = N \setminus A, V$ offen bezüglich τ_M, und damit (aus "$\Leftarrow$" in a)), ist $N \setminus A$ offen bezüglich τ_N. Damit ist $A = N \setminus (N \setminus A)$ abgeschlossen bezüglich τ_N.

Aufgabe 22: (4 Punkte) Sei (M, d) ein metrischer Raum, und $K, L \subset M$ zwei nichtleere Teilmengen, so daß $K \subset (M \setminus L)$.

a) Sei K kompakt, und L abgeschlossen. Zeigen Sie, daß $\operatorname{dist}(K, L) > 0$. Hierbei bezeichnet $\operatorname{dist}(K, L) := \inf\{d(x, y) \,|\, x \in K, y \in L\}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\operatorname{dist}(\,\cdot\,, L) : K \to \mathbb{R}$ von Aufgabe 18, Blatt 5.

b) Zeigen Sie durch einen Gegenbeispiel in $\mathbb{R}^2$, daß dieses nicht im allgemeinen gilt, wenn nur angenommen wird, daß K (und L wie vorher) abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag: a) Die Funktion

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(\,\cdot\,,L) &: K \to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \mathrm{dist}(x,L)\end{aligned}$$

mit $\mathrm{dist}(x,L) = \inf\{d(x,y)\,|\,y \in L\}$ aus Aufgabe 18, Blatt 5, ist (gleichmässig) stetig (wie in Aufgabe 11, Tutorium 4, schon bewiesen). Beweis: Sei $\epsilon > 0$, und $d(x,z) < \epsilon/2 \equiv \delta$. Dann ist, für alle $y \in L$,

$$d(x,L) = \inf\{d(x,y)\,|\,y \in L\} \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq \delta + d(z,y),$$

und damit ist $d(x,L) - \delta \leq d(z,y)$ für alle $y \in L$. Es folgt, daß

$$d(x,L) - \delta \leq \inf\{d(z,y)\,|\,y \in L\} = d(z,L),$$

also $d(x,L) - d(z,L) \leq \delta < \epsilon$. Ähnlich beweist man, daß

$$d(x,z) < \delta \Rightarrow d(z,L) - d(x,L) < \epsilon,$$

und damit gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x,z) < \delta \Rightarrow \big|d(x,L) - d(z,L)\big| < \epsilon.$$

Also ist $\mathrm{dist}(\,\cdot\,,L) : K \to \mathbb{R}$ (gleichmässig) stetig. Weil K kompakt ist, hat (Satz V.3.4) $\mathrm{dist}(\,\cdot\,,L)$ ein Minimum, d.h., es gibt $x_0 \in K$, so daß $\mathrm{dist}(x_0,L) \leq d(x,L)$ für alle $x \in K$, und damit ist $\mathrm{dist}(x_0,L) = \mathrm{dist}(K,L) = \inf\{d(x,y)\,|\,x \in K, y \in L\}$. Aus Aufgabe 18, Blatt 5 folgt:

$$\mathrm{dist}(x_0,L) = 0 \Rightarrow x_0 \text{ Randpunkt von } L \Rightarrow x_0 \in L \text{ (weil } L \text{ abgeschlossen ist).}$$

Wiederspruch, denn $x_0 \in K$, und $K \subset \big(M \setminus L\big)$. Also ist $\mathrm{dist}(K,L) > 0$.
b) Z. B.,

$$\begin{aligned}K &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,|\,y \leq 0\},\\ L &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,|\,y \geq e^x\}.\end{aligned}$$

Weil $f(x,y) = y, g(x,y) = e^x - y$ stetige Funktionen sind, so sind $K = f^{-1}(]-\infty,0])$, $L = g^{-1}(]-\infty,0])$ abgeschlossen. K und L sind offentsichtlich nicht beschränkt (man nimm $(x,0) \in K$, mit $x \to \pm\infty$, und $(x,e^x) \in L$ mit $x \to \infty$), und damit auch nicht kompakt, und weil $e^x \to 0, x \to -\infty$, ist

$$\mathrm{dist}(K,L) = \inf\big\{|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)|\,\big|\,(x_1,y_1) \in K, (x_2,y_2) \in L\big\} = 0.$$

($|(x,0) - (x,e^x)| = e^x \to 0, x \to -\infty$).

Aufgabe 23: (4 Punkte) Es sei E ein Banachraum, $k \in]0,1[$ und $f : E \to E$ mit

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \text{für alle } x,y \in E. \tag{1}$$

Zeigen Sie, daß $id_E - f : E \to E$ ein Homöomorphismus ist.
Hinweis: Für beliebiges $a \in E$ ist auch $f + a$ kontrahierend.
Lösungsvorschlag: Aus (1) folgt, daß f (gleichmässig) stetig ist, und damit auch $id_E - f$. Wir zeigen, daß $id_E - f$ eine Bijektion ist.
Injektivität:

$$\begin{aligned}&(id_E - f)(x) = (id_E - f)(z) \Rightarrow x - f(x) = z - f(z) \Rightarrow x - z = f(x) - f(z)\\ &\qquad \Rightarrow 0 \leq \|x - z\| = \|f(x) - f(z)\| \leq k\|x - z\| \Rightarrow \|x - z\| = 0 \text{ (weil } k \in]0,1[) \Rightarrow x = z.\end{aligned}$$

Surjektivität: Behauptung: $\forall a \in E : g := f + a$ ist kontrahierend. Beweis: $g = f + a$ heisst $g(x) = f(x) + a$.

$$\|g(x) - g(z)\| = \|(f(x) + a) - (f(z) + a)\| = \|f(x) - f(z)\| \le k\|x - z\| \text{ für alle } x, z \in E.$$

Es folgt die Behauptung.

Sei $z \in E$, und definiere $g_z(x) := f(x) + z$. Dann ist g_z kontrahierend, also existiert $x_0 = x_0(z) \in E$ mit $g_z(x_0) = x_0$ (Banachsche Fixpunktsatz); damit ist $f(x_0) + z = x_0$, oder $x_0 - f(x_0) = z$, d.h. $(id_E - f)(x_0) = z$. Also ist $id_E - f$ surjektiv.

Also ist $id_E - f$ eine stetige Bijektion. Sei h die inverse Abbildung; von oben haben wir, daß $h(z) = x_0, x_0 - f(x_0) = z$ Dann ist, für $z_1, z_2 \in E$, und $x_1 = h(z_1), x_2 = h(z_2)$,

$$\begin{aligned}\|h(z_1) - h(z_2)\| &= \|x_1 - x_2\| = \|z_1 + f(x_1) - (z_2 + f(x_2))\| \\ &= \|(z_1 - z_2) + (f(x_1) - f(x_2))\| \le \|z_1 - z_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \\ &\le \|z_1 - z_2\| + k\|x_1 - x_2\| = \|z_1 - z_2\| + k\|h(z_1) - h(z_2)\| \\ &\Rightarrow \|h(z_1) - h(z_2)\| \le \frac{1}{1-k}\|z_1 - z_2\|.\end{aligned}$$

Also ist $h = (id_E - f)^{-1}$ auch stetig. Damit ist $id_E - f : E \to E$ ein Homöomorphismus.

Aufgabe 24: (4 Punkte) Es sei $M := \mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Metrik $d(x, y) := |x - y|$. Weiter sei $N := \overline{K_1(0)}$. Es werden die Bezeichnungen von Aufgabe 21 verwendet.

a) Entscheiden Sie mit Beweis, welche der folgenden Aussagen für alle Teilmengen S von N wahr sind.

1) S offen bezüglich $\tau_N \Rightarrow S$ offen bezüglich τ_M.
2) S offen bezüglich $\tau_M \Rightarrow S$ offen bezüglich τ_N.
3) S abgeschlossen bezüglich $\tau_N \Rightarrow S$ abgeschlossen bezüglich τ_M.
4) S abgeschlossen bezüglich $\tau_M \Rightarrow S$ abgeschlossen bezüglich τ_N.

b) Bearbeiten Sie Teilaufgabe a) für den Fall $N := K_1(0)$.

Lösungsvorschlag: a)

1) Falsch: Sei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\} \cap \overline{K_1(0)}$ Diese Menge ist *nicht* offen bezüglich τ_M ($\forall \epsilon > 0 : K_\epsilon((1, 0)) \cap S \ne \emptyset, K_\epsilon((1, 0)) \cap (M \setminus S) \ne \emptyset, (1, 0) \in S$), aber S ist offen bezüglich τ_N. Beweis: $T := \overline{K_1(0)} \setminus S = \{(x, y) | x \le 0\} \cap \overline{K_1(0)}$ ist abgeschlossen bezüglich τ_M (weil $\overline{K_1(0)}$ abgeschlossen bezüglich τ_M ist, und $\{(x, y) | x \le 0\}$ auch, weil die Funktion $f(x, y) = x$ stetig ist, und $\{(x, y) | x \le 0\} = f^{-1}(] - \infty, 0])$). Dann folgt aus 3) unten, daß T auch bezüglich τ_N abgeschlossen ist, und damit ist $S = \overline{K_1(0)} \setminus T$ offen bezüglich τ_N. Also ist S offen bezüglich τ_N, aber nicht bezüglich τ_M.

2) Wahr: Sei S offen bezüglich $\tau_M, S \subset \overline{K_1(0)}$. Dann ist $M \setminus S$ abgeschlossen bezüglich τ_M. Weil $\overline{K_1(0)} \setminus S = \overline{K_1(0)} \cap (M \setminus S)$ also abgeschlossen bezüglich τ_N ist (aus 21 b) "$\Leftarrow$ "), ist S offen bezüglich τ_N.

3) Wahr: S abgeschlossen bezüglich $\tau_N \Rightarrow \exists B$, abgeschlossen bezüglich τ_M, mit $S = B \cap \overline{K_1(0)}$ (aus 21 b) "$\Rightarrow$"). Aber $\overline{K_1(0)}$ ist abgeschlossen bezüglich τ_M, und damit auch $B \cap \overline{K_1(0)} = S$.

4) Wahr: S abgeschlossen bezüglich $\tau_M; S = S \cap \overline{K_1(0)} \Rightarrow S$ abgeschlossen bezüglich τ_N (aus 21 b) "$\Leftarrow$").

b) Falsch: Sei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \ge 0\} \cap K_1(0)$. Weil $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \ge 0\}$ abgeschlossen bezüglich τ_M ist ($\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \ge 0\} = f^{-1}([0, \in [), f(x, y) = x$ stetig), ist (aus 21 b) "$\Leftarrow$") S abgeschlossen bezüglich τ_N. Aber S ist *nicht* abgeschlossen bezüglich τ_M ($\forall \epsilon > 0 : K_\epsilon((1, 0)) \cap S \ne \emptyset, K_\epsilon((1, 0)) \cap (M \setminus S) \ne \emptyset$, also $(1, 0) \in \partial S \setminus S$ (Rand bezüglich τ_M)).

Abgabe bis Montag 30.05.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.

Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` **sind die Blätter im Internet abrufbar.**

Sprechstunden:	**H. Steinlein:**	**Mo 10-11, Zimmer 318**
	T. Sørensen:	**Mi 14-15, Zimmer 335**