Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein

23.05.2005

Übungsblatt 6 zu MPIIA

Aufgabe 21: (4 Punkte) Es sei (M, d) metrischer Raum und sei $N \subset M$. Wir definieren $d_N := d|_{N \times N}$ als die Einschränkung von d auf $N \times N$. Zeigen Sie zunächst, daß (N, d_N) ein metrischer Raum ist. Wir bezeichnen die von (M, d) bzw. die von (N, d_N) erzeugten Topologien mit τ_M bzw. τ_N. Zeigen Sie:

a) U ist offen bezüglich $\tau_N \Leftrightarrow$ es gibt eine bezüglich τ_M offene Menge V mit $U = V \cap N$.

b) A ist abgeschlossen bezüglich $\tau_N \Leftrightarrow$ es gibt eine bezüglich τ_M abgeschlossene Menge B mit $A = B \cap N$.

Aufgabe 22: (4 Punkte) Sei (M, d) ein metrischer Raum, und $K, L \subset M$ zwei nichtleere Teilmengen, so daß $K \subset (M \setminus L)$.

a) Sei K kompakt, und L abgeschlossen. Zeigen Sie, daß $\operatorname{dist}(K, L) > 0$. Hierbei bezeichnet $\operatorname{dist}(K, L) := \inf\{d(x, y) \mid x \in K, y \in L\}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\operatorname{dist}(\cdot, L) : K \to \mathbb{R}$ von Aufgabe 18, Blatt 5.

b) Zeigen Sie durch einen Gegenbeispiel in $\mathbb{R}^2$, daß dieses nicht im allgemeinen gilt, wenn nur angenommen wird, daß K (und L wie vorher) abgeschlossen ist.

Aufgabe 23: (4 Punkte) Es sei E ein Banachraum, $k \in]0, 1[$ und $f : E \to E$ mit

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E.$$

Zeigen Sie, daß $id_E - f : E \to E$ ein Homöomorphismus ist.
Hinweis: Für beliebiges $a \in E$ ist auch $f + a$ kontrahierend.

Aufgabe 24: (4 Punkte) Es sei $M := \mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Metrik $d(x, y) := |x - y|$. Weiter sei $N := \overline{K_1(0)}$. Es werden die Bezeichnungen von Aufgabe 21 verwendet.

a) Entscheiden Sie mit Beweis, welche der folgenden Aussagen für alle Teilmengen S von N wahr sind.

1) S offen bezüglich $\tau_N \Rightarrow S$ offen bezüglich τ_M.
2) S offen bezüglich $\tau_M \Rightarrow S$ offen bezüglich τ_N.
3) S abgeschlossen bezüglich $\tau_N \Rightarrow S$ abgeschlossen bezüglich τ_M.
4) S abgeschlossen bezüglich $\tau_M \Rightarrow S$ abgeschlossen bezüglich τ_N.

b) Bearbeiten Sie Teilaufgabe a) für den Fall $N := K_1(0)$.

Abgabe bis Montag 30.05.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` sind die Blätter im Internet abrufbar.
Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335