

## Übungsblatt 6 zu MPIIA

**Aufgabe 21: (4 Punkte)** Es sei  $(M, d)$  metrischer Raum und sei  $N \subset M$ . Wir definieren  $d_N := d|_{N \times N}$  als die Einschränkung von  $d$  auf  $N \times N$ . Zeigen Sie zunächst, daß  $(N, d_N)$  ein metrischer Raum ist. Wir bezeichnen die von  $(M, d)$  bzw. die von  $(N, d_N)$  erzeugten Topologien mit  $\tau_M$  bzw.  $\tau_N$ . Zeigen Sie:

- a)  $U$  ist offen bezüglich  $\tau_N \Leftrightarrow$  es gibt eine bezüglich  $\tau_M$  offene Menge  $V$  mit  $U = V \cap N$ .
- b)  $A$  ist abgeschlossen bezüglich  $\tau_N \Leftrightarrow$  es gibt eine bezüglich  $\tau_M$  abgeschlossene Menge  $B$  mit  $A = B \cap N$ .

**Aufgabe 22: (4 Punkte)** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum, und  $K, L \subset M$  zwei nichtleere Teilmengen, so daß  $K \subset (M \setminus L)$ .

- a) Sei  $K$  kompakt, und  $L$  abgeschlossen. Zeigen Sie, daß  $\text{dist}(K, L) > 0$ . Hierbei bezeichnet  $\text{dist}(K, L) := \inf\{d(x, y) \mid x \in K, y \in L\}$ .  
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion  $\text{dist}(\cdot, L) : K \rightarrow \mathbb{R}$  von Aufgabe 18, Blatt 5.
- b) Zeigen Sie durch einen Gegenbeispiel in  $\mathbb{R}^2$ , daß dieses nicht im allgemeinen gilt, wenn nur angenommen wird, daß  $K$  (und  $L$  wie vorher) abgeschlossen ist.

**Aufgabe 23: (4 Punkte)** Es sei  $E$  ein Banachraum,  $k \in ]0, 1[$  und  $f : E \rightarrow E$  mit

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E.$$

Zeigen Sie, daß  $\text{id}_E - f : E \rightarrow E$  ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Für beliebiges  $a \in E$  ist auch  $f + a$  kontrahierend.

**Aufgabe 24: (4 Punkte)** Es sei  $M := \mathbb{R}^2$  versehen mit der euklidischen Metrik  $d(x, y) := |x - y|$ . Weiter sei  $N := K_1(0)$ . Es werden die Bezeichnungen von Aufgabe 21 verwendet.

- a) Entscheiden Sie mit Beweis, welche der folgenden Aussagen für alle Teilmengen  $S$  von  $N$  wahr sind.
  - 1)  $S$  offen bezüglich  $\tau_N \Rightarrow S$  offen bezüglich  $\tau_M$ .
  - 2)  $S$  offen bezüglich  $\tau_M \Rightarrow S$  offen bezüglich  $\tau_N$ .
  - 3)  $S$  abgeschlossen bezüglich  $\tau_N \Rightarrow S$  abgeschlossen bezüglich  $\tau_M$ .
  - 4)  $S$  abgeschlossen bezüglich  $\tau_M \Rightarrow S$  abgeschlossen bezüglich  $\tau_N$ .
- b) Bearbeiten Sie Teilaufgabe a) für den Fall  $N := K_1(0)$ .

**Abgabe bis Montag 30.05.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.**

Unter <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen> sind die Blätter im Internet abrufbar.

**Sprechstunden:** H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318  
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335