Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein

09.05.2005

Übungsblatt 5 zu MPIIA

Aufgabe 17: (4 Punkte) Man definiere

$$\begin{aligned}\delta \;:\; & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ & (x,y)\mapsto \arctan|x-y|\end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß δ auf $\mathbb{R}$ eine zu der gewöhnlichen Betragsmetrik äquivalente Metrik ist.
Lösungsvorschlag: Man bemerkt, daß $f(t) := \arctan(t)$ eine Bijektion von $]-\infty,\infty[$ auf $]-\pi/2,\pi/2[$ ist, die wegen $f'(t) = 1/(1+t^2) > 0$ (Aufgabe 8, Blatt 5) monoton wachsend ist. Ausserdem ist $f(0) = 0$. Daraus folgt:

i) $|x-y| \geq 0 \Rightarrow \arctan|x-y| \geq 0;\ \arctan|x-y| = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$

ii) $|x-y| = |y-x| \Rightarrow \arctan|x-y| = \arctan|y-x|.$

iii) Sei, für $s,t \geq 0$,

$$\begin{aligned}g_s : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \arctan(t)+\arctan(s)-\arctan(s+t)\end{aligned}$$

Dann ist $g_s(0) = 0, dg_s(t)/dt = 1/(1+t^2) - 1/(1+(s+t)^2) \geq 0$, und damit gilt $\arctan(t) + \arctan(s) - \arctan(s+t) \geq 0$ für alle $s,t \geq 0$. Daraus folgt (weil $|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$, und arctan monoton ist), daß

$$\begin{aligned}\delta(x,y) &= \arctan|x-y| \leq \arctan\big(|x-z|+|z-y|\big)\\ &\leq \arctan|x-z| + \arctan|z-y| = \delta(x,z)+\delta(z,y).\end{aligned}$$

Damit ist δ ein Metrik.

Um zu zeigen, daß δ zu der gewöhnliche Betragsmetrik äquivalent ist, müssen wir zeigen, daß $(\mathbb{R},|\cdot|)$ und $(\mathbb{R},\delta)$ die gleichen offenen Mengen haben. Sei also $A \subset \mathbb{R}$ offen in $(\mathbb{R},|\cdot|)$. D.h., $\forall x \in A\, \exists \epsilon = \epsilon(x) > 0 : |x-y| < \epsilon \Rightarrow y \in A$. Weil f eine monoton wachsende Bijektion ist, und $f(0) = 0$, gibt es $\eta > 0$ mit $\arctan\epsilon = \eta$. Dann gilt $\delta(x,y) < \eta \Rightarrow \arctan|x-y| < \eta = \arctan\epsilon \Rightarrow |x-y| < \epsilon \Rightarrow y \in A$. Also ist A auch offen in $(\mathbb{R},\delta)$. Ähnlich beweisst man, daß: A offen in $(\mathbb{R},\delta) \Rightarrow$ A offen in $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

Aufgabe 18: (4 Punkte) Sei (X,d) metrischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X\setminus A$ mit $\operatorname{dist}(x,A) = 0$. Zeigen Sie, daß x Randpunkt von A ist. Hierbei bezeichnet $\operatorname{dist}(x,A) := \inf\{d(x,y) : y \in A\}$.
Lösungsvorschlag: $\operatorname{dist}(x,A) = 0$ heißt, daß $\inf\{d(x,y)\,|\,y \in A\} = 0$. Damit gilt: $\forall\epsilon > 0\, \exists y \in A : d(x,y) < \epsilon$ (Wenn es ein $\epsilon_0 > 0$ gäbe, so daß $d(x,y) \geq \epsilon_0$ für alle $y \in A$, dann wäre $\inf\{d(x,y)\,|\,y \in A\} \geq \epsilon_0$). Es folgt: $\forall\epsilon > 0 : K_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Damit ist x Berührungspunkt von A. Weil $x \notin A$, gilt $x \in \overline{A}\setminus A$, also ist x Randpunkt von A.

Aufgabe 19: (4 Punkte) Es sei (X,d) metrischer Raum mit der Eigenschaft, daß $X\setminus\{x\}$ kompakt ist für alle $x \in X$. Zeigen Sie, daß X endlich ist.

Lösungsvorschlag: Sei $x \in X$, dann ist $X \setminus \{x\}$ abgeschlossen weil kompakt (Satz VI.2.2.). Es folgt, daß $\{x\}$ offen ist (weil deren Kompliment abgeschlossen ist). Sei jetzt $x_0 \in X$. Dann ist also

$$X \setminus \{x_0\} = \bigcup_{x \in X \setminus \{x_0\}} \{x\}$$

eine Überdeckung von $X \setminus \{x_0\}$ mit offenen Mengen. Weil $X \setminus \{x_0\}$ kompakt ist, gibt es endlich viele Mengen, $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_k\}$, so daß

$$X \setminus \{x_0\} = \bigcup_{j=1}^{k} \{x_j\}.$$

Das heißt, $X = \bigcup_{j=0}^{k} \{x_j\}$, also ist X endlich.

Aufgabe 20: (4 Punkte) Sei (X, d) metrischer Raum, und $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Teilmengen von X.

(a) Sei $B_n := \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Zeigen Sie, daß $\overline{B_n} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$.

(b) Sei $B := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Ziegen Sie, daß $\overline{B} \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$. Zeigen Sie, durch ein Gegenbeispiel, daß Gleichheit nicht immer gilt.

Lösungsvorschlag: Sei allgemein, $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ eine beliebige Vereinigung von Mengen. Dann ist $\mathcal{A}_\lambda \subset \mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}$ für alle $\lambda \in \Lambda$, und $\overline{\mathcal{B}}$ ist abgeschlossen, also ist $\overline{\mathcal{A}_\lambda} \subset \overline{\mathcal{B}}$ für alle $\lambda \in \Lambda$, und damit $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{\mathcal{A}_\lambda} \subset \overline{\mathcal{B}}$. Insbesonders ist a) $\overline{B_n} \supset \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$, und b) $\overline{B} \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$.

Ferner (zu a)), sei $x \in \overline{B_n}$. Dann gilt: $\forall m \in \mathbb{N} : K_{1/m}(x) \cap B_n \neq \emptyset$; sei $x_m \in K_{1/m}(x) \cap B_n$. Weil $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $j = j(m)$ so daß $x_m \in A_j$. Daher gibt es (weil es nur endlich viele A_j's gibt) ein A_{j_0} und eine Teilfolge $\{x_{m_k}\} \subset \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, so daß $x_{j_k} \in A_{j_0}, d(x_{j_k}, x) < 1/j_k$. Also gilt $x \in \overline{A_{j_0}}$. Das heißt, $\overline{B_n} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$, und damit $\overline{B_n} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$.

Zu b), sei $A_j :=]1/j, 1], j \in \mathbb{N}$, und $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Dann ist $B =]0, 1]$, und $\overline{B} = [0, 1]$, aber $\overline{A_j} = [1/j, 1]$, und damit $\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} =]0, 1] \neq \overline{B}$.

Abgabe bis *Donnerstag 19.05.2005*, *11.15* **Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.**
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` **sind die Blätter im Internet abrufbar.**
Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335