

## Übungsblatt 5 zu MPIIA

**Aufgabe 17: (4 Punkte)** Man definiere

$$\begin{aligned}\delta &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \arctan |x - y|\end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß  $\delta$  auf  $\mathbb{R}$  eine zu der gewöhnlichen Betragsmetrik äquivalente Metrik ist.

*Lösungsvorschlag:* Man bemerkt, daß  $f(t) := \arctan(t)$  eine Bijektion von  $] -\infty, \infty[$  auf  $] -\pi/2, \pi/2[$  ist, die wegen  $f'(t) = 1/(1+t^2) > 0$  (Aufgabe 8, Blatt 5) monoton wachsend ist. Ausserdem ist  $f(0) = 0$ . Daraus folgt:

- i)  $|x - y| \geq 0 \Rightarrow \arctan |x - y| \geq 0$ ;  $\arctan |x - y| = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- ii)  $|x - y| = |y - x| \Rightarrow \arctan |x - y| = \arctan |y - x|$ .
- iii) Sei, für  $s, t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}g_s &: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \arctan(t) + \arctan(s) - \arctan(s + t)\end{aligned}$$

Dann ist  $g_s(0) = 0$ ,  $dg_s(t)/dt = 1/(1+t^2) - 1/(1+(s+t)^2) \geq 0$ , und damit gilt  $\arctan(t) + \arctan(s) - \arctan(s+t) \geq 0$  für alle  $s, t \geq 0$ . Daraus folgt (weil  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ , und  $\arctan$  monoton ist), daß

$$\begin{aligned}\delta(x, y) &= \arctan |x - y| \leq \arctan (|x - z| + |z - y|) \\ &\leq \arctan |x - z| + \arctan |z - y| = \delta(x, z) + \delta(z, y).\end{aligned}$$

Damit ist  $\delta$  ein Metrik.

Um zu zeigen, daß  $\delta$  zu der gewöhnliche Betragsmetrik äquivalent ist, müssen wir zeigen, daß  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  und  $(\mathbb{R}, \delta)$  die gleichen offenen Mengen haben. Sei also  $A \subset \mathbb{R}$  offen in  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ . D.h.,  $\forall x \in A \exists \epsilon = \epsilon(x) > 0 : |x - y| < \epsilon \Rightarrow y \in A$ . Weil  $f$  eine monoton wachsende Bijektion ist, und  $f(0) = 0$ , gibt es  $\eta > 0$  mit  $\arctan \epsilon = \eta$ . Dann gilt  $\delta(x, y) < \eta \Rightarrow \arctan |x - y| < \eta = \arctan \epsilon \Rightarrow |x - y| < \epsilon \Rightarrow y \in A$ . Also ist  $A$  auch offen in  $(\mathbb{R}, \delta)$ . Ähnlich beweist man, daß:  $A$  offen in  $(\mathbb{R}, \delta) \Rightarrow A$  offen in  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

**Aufgabe 18: (4 Punkte)** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $A \subset X$  und  $x \in X \setminus A$  mit  $\text{dist}(x, A) = 0$ . Zeigen Sie, daß  $x$  Randpunkt von  $A$  ist. Hierbei bezeichnet  $\text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ .

*Lösungsvorschlag:*  $\text{dist}(x, A) = 0$  heißt, daß  $\inf\{d(x, y) \mid y \in A\} = 0$ . Damit gilt:  $\forall \epsilon > 0 \exists y \in A : d(x, y) < \epsilon$  (Wenn es ein  $\epsilon_0 > 0$  gäbe, so daß  $d(x, y) \geq \epsilon_0$  für alle  $y \in A$ , dann wäre  $\inf\{d(x, y) \mid y \in A\} \geq \epsilon_0$ ). Es folgt:  $\forall \epsilon > 0 : K_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ . Damit ist  $x$  Berührungspunkt von  $A$ . Weil  $x \notin A$ , gilt  $x \in \overline{A} \setminus A$ , also ist  $x$  Randpunkt von  $A$ .

**Aufgabe 19: (4 Punkte)** Es sei  $(X, d)$  metrischer Raum mit der Eigenschaft, daß  $X \setminus \{x\}$  kompakt ist für alle  $x \in X$ . Zeigen Sie, daß  $X$  endlich ist.

*Lösungsvorschlag:* Sei  $x \in X$ , dann ist  $X \setminus \{x\}$  abgeschlossen weil kompakt (Satz VI.2.2.). Es folgt, daß  $\{x\}$  offen ist (weil deren Komplement abgeschlossen ist). Sei jetzt  $x_0 \in X$ . Dann ist also

$$X \setminus \{x_0\} = \bigcup_{x \in X \setminus \{x_0\}} \{x\}$$

eine Überdeckung von  $X \setminus \{x_0\}$  mit offenen Mengen. Weil  $X \setminus \{x_0\}$  kompakt ist, gibt es endlich viele Mengen,  $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_k\}$ , so daß

$$X \setminus \{x_0\} = \bigcup_{j=1}^k \{x_j\}.$$

Das heißt,  $X = \bigcup_{j=0}^k \{x_j\}$ , also ist  $X$  endlich.

**Aufgabe 20: (4 Punkte)** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum, und  $A_1, A_2, A_3, \dots$  Teilmengen von  $X$ .

- (a) Sei  $B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j$ . Zeigen Sie, daß  $\overline{B_n} = \bigcup_{j=1}^n \overline{A_j}$ .
- (b) Sei  $B := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ . Zeigen Sie, daß  $\overline{B} \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$ . Zeigen Sie, durch ein Gegenbeispiel, daß Gleichheit nicht immer gilt.

*Lösungsvorschlag:* Sei allgemein,  $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$  eine beliebige Vereinigung von Mengen. Dann ist  $\mathcal{A}_\lambda \subset \mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}$  für alle  $\lambda \in \Lambda$ , und  $\overline{\mathcal{B}}$  ist abgeschlossen, also ist  $\overline{\mathcal{A}_\lambda} \subset \overline{\mathcal{B}}$  für alle  $\lambda \in \Lambda$ , und damit  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{\mathcal{A}_\lambda} \subset \overline{\mathcal{B}}$ . Insbesondere ist a)  $\overline{B_n} \supset \bigcup_{j=1}^n \overline{A_j}$ , und b)  $\overline{B} \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$ .

Ferner (zu a)), sei  $x \in \overline{B_n}$ . Dann gilt:  $\forall m \in \mathbb{N} : K_{1/m}(x) \cap B_n \neq \emptyset$ ; sei  $x_m \in K_{1/m}(x) \cap B_n$ . Weil  $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$  gibt es für jedes  $m \in \mathbb{N}$  ein  $j = j(m)$  so daß  $x_m \in A_j$ . Daher gibt es (weil es nur endlich viele  $A_j$ 's gibt) ein  $A_{j_0}$  und eine Teilfolge  $\{x_{m_k}\} \subset \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , so daß  $x_{j_k} \in A_{j_0}$ ,  $d(x_{j_k}, x) < 1/j_k$ . Also gilt  $x \in \overline{A_{j_0}}$ . Das heißt,  $\overline{B_n} \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{A_j}$ , und damit  $\overline{B_n} = \bigcup_{j=1}^n \overline{A_j}$ .

Zu b), sei  $A_j := ]1/j, 1]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , und  $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ . Dann ist  $B = ]0, 1]$ , und  $\overline{B} = [0, 1]$ , aber  $\overline{A_j} = [1/j, 1]$ , und damit  $\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} = ]0, 1] \neq \overline{B}$ .

**Abgabe bis Donnerstag 19.05.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.**

Unter <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen> sind die Blätter im Internet abrufbar.

**Sprechstunden:** H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318  
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335