Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein 02.05.2005

Übungsblatt 4 zu MPIIA

Aufgabe 17: (4 Punkte) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve, die ein Punkt der Peripherie des Einheitskreises durchläuft, wenn der Kreis auf einer Geraden eine Umdrehung abrollt.

Lösungsvorschlag: Sei $D(t) := (x(t), y(y))$ der Punkt der Peripherie des Einheitskreises deren Bewegung zu beschreiben ist, $D(0) = (0,0)$. Sei $C(t)$ das Zentrum des Einheitskreises, dann ist $C(0) = (0,1)$; die Bewegung von D ist die Summe der (nach rechts gehenden) geradelinigen Bewegung von C, und der Umdrehung von D um C (*im* Uhrzeigersinn), in etwa

$$\begin{aligned} D(t) &= (t,1) + (\sin(-t), \cos(-t)), \\ &= ((t - \sin(t), \cos(t)),\ t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

(Weil $\sin(-s) = -\sin(s), \cos(-s) = \cos(s)$). Also ist $D'(t) = (1 - \cos(t), -\sin(t))$, und damit (weil $\sin^2(s) + \cos^2(s) = 1$)

$$|D'(t)| = \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (-\sin(t))^2} = \sqrt{2 - 2\cos(t)} = \sqrt{4\sin^2(t/2)} = 2\sin(t/2),$$

weil aus $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$, $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ folgt $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, und weil $\sin^2(t/2) \geq 0$ wenn $t \in [0, 2\pi]$. Dann ist die Bogenlänge der *Zykloide* (wie diese Kurve heisst)

$$\int_0^{2\pi} |D'(t)| dt = \int_0^{2\pi} 2\sin(t/2) dt = 4[-\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 4(1 - (-1)) = 8.$$

Aufgabe 18: (4 Punkte) Berechnen Sie die Bogenlänge der Funktion

$$f : [0, \tfrac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 1 - \ln\cos x.$$

Lösungsvorschlag: Als Parametrisierung verwendet man $x(t) = (t, f(t)) = (t, 1 - \ln\cos t), t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ Damit ist

$$x'(t) = (1, -\frac{1}{\cos(t)} \cdot (-\sin(t)) = (1, \tan(t)) \Rightarrow |x'(t)| = \sqrt{1 + \tan^2(t)},$$

und dann bekommt man für die Bogenlänge (durch die Substitution $u = \tan(t), du/dt = 1 + \tan^2(t) = 1 + u^2$)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} |x'(t)| dt &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2(t)} dt = \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, \frac{du}{1+u^2} \\ &= \left[\ln(u + \sqrt{u^2+1} \right]_0^1 = \ln(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

(Dass $\ln(u + \sqrt{u^2+1})$ eine Stammfunktion zu $1/\sqrt{u^2+1}$ ist, folgt aus Aufgabe 1, Tutorium 1, und Aufgabe 3, Blatt 1).

Aufgabe 19: (4 Punkte) Die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. Zeigen Sie durch partielle Integration

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.

(b) $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \; \Gamma(k+1) = k!$.

Lösungsvorschlag: (a) Durch zweimal partielle Integration bekommt man

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^{(x+1)-1}e^{-t}dt = \lim_{c\to 0}\int_c^1 t^x e^{-t}dt + \lim_{b\to\infty}\int_1^b t^x e^{-t}dt \\
&= \lim_{c\to 0}\Big\{\big[-e^{-t}t^x\big]_c^1 - \int_c^1 xt^{x-1}(-e^{-t})dt\Big\} + \lim_{b\to\infty}\Big\{\big[-e^{-t}t^x\big]_1^b - \int_1^b xt^{x-1}(-e^{-t})dt\Big\} \\
&= \lim_{c\to 0}(-e^{-1}+e^{-c}c^x) + x(\lim_{c\to 0}\int_c^1 t^{x-1}e^{-t}dt) \\
&\quad + \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}b^x + e^{-1}) + x(\lim_{b\to\infty}\int_1^b t^{x-1}e^{-t}dt) \\
&= x\big(\lim_{c\to 0}\int_c^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \lim_{b\to\infty}\int_1^b t^{x-1}e^{-t}dt) = x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

Daß alle Grenzwerten dieser Integrale existieren folgt aus der Vorlesung (weil $x>0, x+1>0$). Ausserdem ist verwendet worden, daß $\lim_{c\to 0} e^{-c}c^x = \lim_{b\to\infty} e^{-b}b^x = 0$ wenn $x>0$.
(b) Induktion: $k=0$:

$$\Gamma(0+1) = \int_0^\infty t^{(0+1)-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}[-e^{-t}]_0^b = 1 = 0!.$$

Induktionsschritt; Induktionsannahme: $\Gamma(k+1)=k!$. Dann, nach (a), und Induktionsannahme,

$$\Gamma((k+1)+1) = (k+1)\Gamma(k+1) = (k+1)k! = (k+1)!.$$

Die Behauptung folgt durch Induktion.

Aufgabe 20: (4 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $I_n := \int_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}, \quad I_{2n+1} = \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1}.$$

Zusatzaufgabe, ohne Punkte: Zeigen Sie

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^n \frac{4j^2}{4j^2-1}\right).$$

Lösungsvorschlag: Induktion; Anfang: <u>$n=0$:</u>

$$I_0 = \int_0^{\pi/2}\sin(x)^0 dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}, \; I_1 = \int_0^{\pi/2}\sin(x)^1 dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1,$$

$$\frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^0 \frac{2j-1}{2j} = \frac{\pi}{2}, \; \prod_{j=1}^0 \frac{2j}{2j+1} = 1 \text{ (per Definition ist das “leere” Produkt gleich 1)}$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^0 \frac{2j-1}{2j}, \; I_1 = \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1}.$$

<u>Induktionsschritt:</u> Induktionsannahme:

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}, \; I_{2n+1} = \prod_{j=1}^0 \frac{2j}{2j+1}.$$

Dann folgt, durch partielle Integration, und Verwendung der Induktionsannahme, daß

$$\begin{aligned}
I_{2(n+1)} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+2}(x)dx = [-\cos(x)\sin^{2n+1}(x)]_0^{\pi/2} \\
&\qquad - \int_0^{\pi/2} (2n+1)\sin^{2n}(x)\cos(x)(-\cos(x))dx \\
&= (2n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)\cos^2(x)dx = (2n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)(1-\sin^2(x))dx \\
&\Rightarrow (2n+2)I_{2(n+1)} = (2n+1)I_{2n} \\
&\Rightarrow I_{2(n+1)} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \cdot \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{n}\frac{2j-1}{2j} = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{n+1}\frac{2j-1}{2j}. \\
I_{2(n+1)+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+3}(x)dx = [-\cos(x)\sin^{2n+2}]_0^{\pi/2} \\
&\qquad - \int_0^{\pi/2} (2n+2)\sin^{2n+1}(x)\cos(x)(-\cos(x))dx \\
&= (2n+2)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)(1-\sin^2(x))dx \\
&\Rightarrow (2n+3)I_{2(n+1)+1} = (2n+2)I_{2n+1} \\
&\Rightarrow I_{2(n+1)+1} = \frac{2n+2}{2n+3}I_{2n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \cdot \prod_{j=1}^{n}\frac{2j}{2j+1} = \prod_{j=1}^{n+1}\frac{2j}{2j+1}.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt durch Induktion.

Zusatzaufgabe: Weil $0 \le \sin x \le 1$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ bekommt man

$$0 \le I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1} = I_{2(n-1)+1} \tag{1}$$

daß heisst,

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{n}\frac{2j}{2j+1} \le \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{n}\frac{2j-1}{2j} \le \prod_{j=1}^{n-1}\frac{2j}{2j+1} \\
&\Rightarrow \prod_{j=1}^{n}\frac{4j^2}{4j^2-1} \le \frac{\pi}{2} \le \frac{2n}{2n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{4j^2}{4j^2-1}.
\end{aligned}$$

Weil $\frac{2n}{2n-1} \to 1, n \to \infty$, reicht es zu zeigen, daß $\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{4j^2}{4j^2-1}$ existiert, dann folgt die Behauptung.

Man bemerkt, daß

$$0 \le \ln\Big(\prod_{j=1}^{n}\frac{4j^2}{4j^2-1}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\ln\big(1+\frac{1}{4j_1^2-1}\big) \le \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4j_1^2-1} \le \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2},$$

weil $\ln(1+x) \le x$ für $x \ge 0$ (man untersuche die Funktion $g(x) = x - \ln(1+x), x \ge 0$). Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}$ ist konvergent, und damit (Majorantenkriterium) auch die Reihe $\sum_{j=1}^{n}\ln\big(1+\frac{1}{4j_1^2-1}\big)$. Weil die Exponentialfunktion stetig ist, existiert dann auch $\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{4j^2}{4j^2-1}$.

Abgabe bis Montag 09.05.2005, *11.15* Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` **sind die Blätter im Internet abrufbar.**
Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335