Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein 25.04.2005

Übungsblatt 3 zu MPIIA

Ihre Lösungen sollten die Herleitungen der jeweiligen Stammfunktionen beinhalten (auf das bloße Verifizieren einer Stammfunktion durch Differerenzieren gibt es keine Punkte).

Aufgabe 9: (4 Punkte) Integrale der Form $\int f(\sin x, \cos x)dx$ lassen sich oft mit der Substitution $y = \tan\frac{x}{2}$ elementar berechnen, zumindest in Intervallen, in denen $\tan\frac{x}{2}$ definiert ist.

a) Zeigen Sie $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$, wenn $\frac{x}{2} \neq (k+\frac{1}{2})\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ ist.

b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}, \qquad \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}.$$

Lösungsvorschlag: a) Mit $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ und $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ folgt das Additionstheorem $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$. Also ist

$$\frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{\frac{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{\frac{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}$$
$$= \frac{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})} = \cos^2(\tfrac{x}{2}) - \sin^2(\tfrac{x}{2}) = \cos(2\cdot\tfrac{x}{2}) = \cos(x).$$

Dies gilt wenn $\cos(\frac{x}{2}) \neq 0$, also wenn $\frac{x}{2} \neq (k+\frac{1}{2})\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ ist.

b) Mit der Substitution $y = \tan(\frac{x}{2})$ ist $x = 2\arctan(y)$, und damit $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$; also bekommt man mit a)

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}dx = \int \frac{1+y^2}{1-y^2}\,\frac{2dy}{1+y^2}$$
$$= \int \frac{2\,dy}{1-y^2} \qquad \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} = \frac{2}{1-y^2}\right)$$
$$= \int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{y-1} = \ln|1+y| - \ln|y-1| = \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\tan(\frac{x}{2})-1}\right|.$$

Man sieht, daß $x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow \frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{8}] \Rightarrow \frac{x}{2} \neq (k+\frac{1}{2})\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ - also bekommt man

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)} = \left[\ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\tan(\frac{x}{2})-1}\right|\right]_0^{\pi/4} = \ln\left|\frac{\tan(\frac{\pi}{8})+1}{\tan(\frac{\pi}{8})-1}\right| - \ln\left|\frac{1}{-1}\right| = \ln\left|\frac{\tan(\frac{\pi}{8})+1}{\tan(\frac{\pi}{8})-1}\right|.$$

Aus den Additionstheoremen für cos und sin bekommt man

$$\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2) - [\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)]}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \tan(\alpha/2).$$

Weil $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ (Aufgabe 1, Blatt 1), hat man $\tan(\pi/8) = (1-1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$, und damit

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\left|\frac{(\sqrt{2}-1)+1}{(\sqrt{2}-1)-1}\right| = \ln(1+\sqrt{2}).$$

Als nächstes bemerkt man, daß $\frac{\pi}{2} = (k+\frac{1}{2})\pi$ für $k = 0$, und daß $\pi \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Also muss man das Integral $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$ *teilen*:

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{\cos x} + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{a\to 0} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi - a} \frac{dx}{\cos x} + \lim_{b\to 0} \int_{\pi+b}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$$
$$= \lim_{a\to 0} \Big[\ln \Big| \frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\tan(\frac{x}{2})-1} \Big| \Big]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi - a} + \lim_{b\to 0} \Big[\ln \Big| \frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\tan(\frac{x}{2})-1} \Big|_{\pi+b}^{\frac{5\pi}{4}}.$$

Mit l'Hôpital bekommt man ($\frac{d}{dt}\tan(t) = 1 + \tan^2(t)$)

$$\lim_{a\to 0} \Big| \frac{\tan(\frac{\pi-a}{2})+1}{\tan(\frac{\pi-a}{2})-1} \Big| = \lim_{a\to 0} \Big| \frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{\pi-a}{2}))}{\frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{\pi-a}{2}))} \Big| = 1,$$
$$\lim_{b\to 0} \Big| \frac{\tan(\frac{\pi+b}{2})+1}{\tan(\frac{\pi+b}{2})-1} \Big| = \lim_{b\to 0} \Big| \frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{\pi+b}{2}))}{\frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{\pi+b}{2}))} \Big| = 1,$$

und daher (weil $\ln 1 = 0$)

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \ln \Big| \frac{\tan(\frac{5\pi}{8})+1}{\tan(\frac{5\pi}{8})-1} \Big| - \ln \Big| \frac{\tan(\frac{3\pi}{8})+1}{\tan(\frac{3\pi}{8})-1} \Big|.$$

Es folgt aus dem Additionstheorem für tan, und $\tan(\pi/4) = 1$ (Ausgabe 1, Blatt 1), daß

$$\tan(3\pi/8) = \tan(\pi/4 + \pi/8) = \frac{\tan(\pi/4) + \tan(\pi/8)}{1 - \tan(\pi/4)\tan(\pi/8)} = \frac{1+\tan(\pi/8)}{1-\tan(\pi/8)} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{\tan(\frac{3\pi}{8})+1}{\tan(\frac{3\pi}{8})-1} = \frac{\frac{1+\tan(\pi/8)}{1-\tan(\pi/8)}+1}{\frac{1+\tan(\pi/8)}{1-\tan(\pi/8)}-1} = \frac{1}{\tan(\pi/8)} \Rightarrow$$
$$\ln \Big| \frac{\tan(\frac{3\pi}{8})+1}{\tan(\frac{3\pi}{8})-1} \Big| = \ln \Big| \frac{1}{\tan(\pi/8)} \Big| = -\ln(\tan(\pi/8)) = -\ln(\sqrt{2}-1),$$
$$\tan(5\pi/8) = \tan(\pi/4 + 3\pi/8) = \frac{\tan(\pi/4) + \tan(3\pi/8)}{1 - \tan(\pi/4)\tan(3\pi/8)} = \frac{1+\tan(3\pi/8)}{1-\tan(3\pi/8)} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{\tan(\frac{5\pi}{8})+1}{\tan(\frac{5\pi}{8})-1} = \frac{\frac{1+\tan(3\pi/8)}{1-\tan(3\pi/8)}+1}{\frac{1+\tan(3\pi/8)}{1-\tan(3\pi/8)}-1} = \frac{1}{\tan(3\pi/8)} \Rightarrow$$
$$\ln \Big| \frac{\tan(\frac{5\pi}{8})+1}{\tan(\frac{5\pi}{8})-1} \Big| = \ln \Big| \frac{1}{\tan(3\pi/8)} \Big| = -\ln(\tan(3\pi/8))$$
$$= -\ln\Big(\frac{1+\tan(\pi/8)}{1-\tan(\pi/8)}\Big) = -\ln\Big(\frac{1+(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)}\Big) = -\ln\Big(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\Big) = \ln(\sqrt{2}-1).$$

Also ist

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \ln \Big| \frac{\tan(\frac{5\pi}{8})+1}{\tan(\frac{5\pi}{8})-1} \Big| - \ln \Big| \frac{\tan(\frac{3\pi}{8})+1}{\tan(\frac{3\pi}{8})-1} \Big|$$
$$= \ln(\sqrt{2}-1) - (-\ln(\sqrt{2}-1)) = \underline{2\ln(\sqrt{2}-1)}.$$

Andere möglichkeit:

$$\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \frac{du}{\cos u} = \int_{3\pi} 4^{\pi} \frac{du}{\cos u} + \int_{\pi} 5\pi/4^{\pi} \frac{du}{\cos u}$$
$$= \int_{\pi/4}^{0} \frac{-dx}{\cos(\pi - x)} + \int_{0}^{\pi/4} \frac{dv}{\cos(v+\pi)} = \int_{\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos x} + \int_{0}^{\pi/4} \frac{dv}{-\cos v}$$
$$= -2\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = -2\ln(1+\sqrt{2}) = 2\ln(\sqrt{2}-1).$$

Aufgabe 10: (4 Punkte) Sei $\gamma_n := \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Finden Sie durch partielle Integration eine Rekursionsformel für γ_n.

b) Finden Sie eine explizite Formel für γ_n.

Lösungsvorschlag: a) Durch partielle Integration bekommt man

$$\gamma_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-nx^{n-1}e^{-x})dx = -\tfrac{1}{e} + n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx \Rightarrow$$
$$\gamma_n = n\gamma_{n-1} - \tfrac{1}{e}.$$

b) Unter der Verwendung von der Rekursionsformel in a) kommt man auf der Vermutung:

$$\gamma_n = n! - \tfrac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \tag{1}$$

Dies beweisst man durch Induktion:
<u>$n = 0$</u>:

$$\gamma_0 = \int_0^1 x^0 e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e} = 1 - \tfrac{1}{e}\cdot\frac{0!}{0!} = 1! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{0}\frac{0!}{k!}.$$

<u>Induktionsschritt</u>: Angenommen, (1) gilt für n. Von a) und dieser Induktionsannahme bekommt man

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} &= (n+1)\gamma_n - \tfrac{1}{e} = (n+1)\Big(n! - \tfrac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\Big) - \frac{1}{e} = (n+1)n! - \frac{1}{e}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)n!}{k!} + 1\Big)\\ &= (n+1)! - \tfrac{1}{e}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{k!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!}\Big) = (n+1)! + \tfrac{1}{e}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!}.\end{aligned}$$

Also gilt (1) auch für $n+1$. Durch Induktion gilt dann (1) für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 11: (4 Punkte) Entscheiden Sie mit Beweis, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\,dx$$

existiert.
Lösungsvorschlag: Man bemerkt zuerst, daß $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)dx$ endlich ist, weil $\sin(x^2)$ auf $[0, \sqrt{2\pi}]$ stetig ist (als Verknüpfung von zwei stetigen Funktionen).

Sei $a > \sqrt{2\pi}$. Mit der Substitution $t = x^2$ bekommt man

$$\int_{\sqrt{2\pi}}^{a} \sin(x^2)dx = \int_{2\pi}^{a^2} \sin(t)\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{a^2}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt. \tag{2}$$

Sei, für $k = 1, 2, 3, \ldots,$

$$a_k^+ := \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt\ , \quad a_k^- := -\int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$$

Weil $\sin(t) \geq 0$ für $t \in [k2\pi, k2\pi + \pi]$, und $\sin(t) \leq 0$ für $t \in [k2\pi + \pi, k2\pi + 2\pi]$, gilt $a_k^+ \geq 0, a_k^- \geq 0$. Ausserdem, weil $g(t) := \frac{1}{\sqrt{t}}$ monoton fallend ist, und $f(t) := \sin(t)$ 2π-periodisch ist, gilt (Substitution $u = t - 2\pi$)

$$a_{k+1}^+ = \int_{(k+1)2\pi}^{(k+1)2\pi+\pi}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt = \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi}\frac{\sin(u)}{\sqrt{u+2\pi}}du \leq \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi}\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du = a_k^+,$$
$$a_{k+1}^- = -\int_{(k+1)2\pi+\pi}^{(k+1)2\pi+2\pi}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt = -\int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi}\frac{\sin(u)}{\sqrt{u+2\pi}}du \leq -\int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi}\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du = a_k^-.$$

Vom Mittelwertsatz der Integralrechnung bekommt man weiter, daß $\xi_k^+ \in [k2\pi, k2\pi+\pi]$, $\xi_k^- \in [k2\pi+\pi, k2\pi+2\pi]$ existieren, so daß

$$\begin{aligned}
0 \leq a_k^+ &:= \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\xi_k^+}} \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \sin(t) dt = \frac{2}{\sqrt{\xi_k^+}} \leq \frac{1}{\sqrt{k2\pi}} \to 0\ ,\ k \to \infty, \\
0 \leq a_k^- &:= -\int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\xi_k^-}} \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} (-\sin(t)) dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\xi_k^-}} \leq \frac{1}{\sqrt{k2\pi+\pi}} \to 0\ ,\ k \to \infty.
\end{aligned}$$

Also gilt, daß $\{a_k^+\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{a_k^-\}_{k\in\mathbb{N}}$ positive, monoton fallende Nullfolgen sind. Endlich hat man, weil $\sin(s+\pi) = -\sin(s)$ (und mit den Substitutionen $u = t-\pi, v = u-\pi$),

$$\begin{aligned}
a_{k+1}^+ &= \int_{(k+1)2\pi}^{(k+1)2\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{\sqrt{u+\pi}} du \\
&= \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{-\sin(u)}{\sqrt{u+\pi}} du \leq \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{-\sin(u)}{\sqrt{u}} du = a_k^- \\
&= \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{-\sin(v+\pi)}{\sqrt{v+\pi}} dv = \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{\sin(v)}{\sqrt{v+\pi}} dv \leq \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{\sin(v)}{\sqrt{v}} dv = a_k^+.
\end{aligned}$$

Also ist $a_k^+ \geq a_k^- \geq a_{k+1}^+ \geq a_{k+1}^- \geq \ldots \geq 0$. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert daher die (alternierende) Reihe $a_1^+ - a_1^- + a_2^+ - a_2^- + a_3^+ - a_3^- + \cdots$.

Kehren wir jetzt zu (2) zurück. Für $a > 0$ gibt es *ein* $k_0 = k_0(a) \in \mathbb{N}$, so daß $2\pi k_0 \leq a^2 < 2\pi(k_0+1)$. Für dies gilt: $a \to \infty \Rightarrow k_0(a) \to \infty$. Weiter ist dann (siehe (2))

$$\int_{\sqrt{2\pi}}^{a} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{a^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \Big[\sum_{k=1}^{k_0-1} (a_k^+ - a_k^-) + \int_{2\pi k_0}^{a^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \Big]$$

Jetzt ist

$$0 \leq \Big| \int_{2\pi k_0}^{a^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \Big| \leq \int_{2\pi k_0}^{a^2} \Big| \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \Big| dt \leq \int_{2\pi k_0}^{2\pi(k_0+1)} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_0}} \to 0\ , k_0 \to \infty.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty} \int_{\sqrt{2\pi}}^{a} \sin(x^2) dx &= \frac{1}{2} \lim_{a\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{k_0-1} (a_k^+ - a_k^-) \Big) + \frac{1}{2} \lim_{a\to\infty} \Big(\int_{2\pi k_0}^{a^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) < \infty.
\end{aligned}$$

Damit existiert das Integral $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ als die Summe von den Integralen $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)dx$ und $\int_{\sqrt{2\pi}}^\infty \sin(x^2)dx$.

Weil (durch die Substitution $u = -x$)

$$\int_{-a}^{-\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx = \int_{\sqrt{2\pi}}^{a} \sin(u^2) du,$$

existiert auch das Integral $\int_{-\infty}^0 \sin(x^2)dx$, und damit auch das Integral $\int_{-\infty}^\infty \sin(x^2)dx$ als die Summe von $\int_{-\infty}^0 \sin(x^2)dx$ und $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$.

Aufgabe 12: (4 Punkte) Berechnen Sie Stammfunktionen auf geeigneten (d. h. den maximal möglichen) Intervallen zu folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 2}$

(b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

Lösungsvorschlag:
(a) Weil $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ hat der Nenner keine reellen Nullstellen. Also ist die Stammfunktion überall definiert, und man bekommt (durch die Substitution $u = x - 1$ in beide Integralen)

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{x-1}{(x-1)^2+1}dx + \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \int \frac{u\,du}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \arctan(u) + C = \frac{1}{2}\ln\left((x-1)^2+1\right) + \arctan(x-1) + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + \arctan(x-1) + C.$$

(Die zwei Integrale sind im Aufgabe 4 im 2. Tutorium bestimmt worden). Man überprüft durch Differenzieren, daß dies eine Stammfunktion ist.
(b) Man sieht, daß $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$, und daß weder $x = 1$ noch $x = -1$ Nullstellen von $3x^2 - 3x - 2$ sind. Die Stammfunktion wird dann auf $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,\infty[$ definiert sein.

Man rechnet:

$$\frac{3x^2-3x-2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 3x - 2 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$
$$= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C) \Rightarrow \begin{cases} A+C=3 \\ B-2C=-3 \\ -A+B+C=-2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow A = 2, B = -1, C = 1 \Rightarrow$$
$$\int \frac{3x^2-3x-2}{x^3-x^2-x+1} = 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x+1}$$
$$= 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x+1| + C.$$

Man überprüft durch Differenzieren, daß dies eine Stammfunktion ist (auf $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,\infty[$).

Abgabe bis Montag 02.02.2005, *11.15* Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` sind die Blätter im Internet abrufbar.

Sprechstunden:	**H. Steinlein:**	**Mo 10-11, Zimmer 318**
	T. Sørensen:	**Mi 14-15, Zimmer 335**