

Übungsblatt 3 zu MPIIA

Ihre Lösungen sollten die Herleitungen der jeweiligen Stammfunktionen beinhalten (auf das bloße Verifizieren einer Stammfunktion durch Differenzieren gibt es keine Punkte).

Aufgabe 9: (4 Punkte) Integrale der Form $\int f(\sin x, \cos x) dx$ lassen sich oft mit der Substitution $y = \tan \frac{x}{2}$ elementar berechnen, zumindest in Intervallen, in denen $\tan \frac{x}{2}$ definiert ist.

a) Zeigen Sie $\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$, wenn $\frac{x}{2} \neq (k + \frac{1}{2})\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ ist.

b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}, \quad \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}.$$

Lösungsvorschlag: a) Mit $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ und $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ folgt das Additionstheorem $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$. Also ist

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} &= \frac{1 - \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{1 + \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{\frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{\frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} \\ &= \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \cos(2 \cdot \frac{x}{2}) = \cos(x). \end{aligned}$$

Dies gilt wenn $\cos(\frac{x}{2}) \neq 0$, also wenn $\frac{x}{2} \neq (k + \frac{1}{2})\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ ist.

b) Mit der Substitution $y = \tan(\frac{x}{2})$ ist $x = 2 \arctan(y)$, und damit $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$; also bekommt man mit a)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos(x)} &= \int \frac{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})} dx = \int \frac{1 + y^2}{1 - y^2} \frac{2dy}{1 + y^2} \\ &= \int \frac{2dy}{1 - y^2} \quad \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} = \frac{2}{1-y^2} \right) \\ &= \int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{y-1} = \ln|1+y| - \ln|y-1| = \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = \ln \left| \frac{\tan(\frac{x}{2}) + 1}{\tan(\frac{x}{2}) - 1} \right|. \end{aligned}$$

Man sieht, daß $x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow \frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{8}] \Rightarrow \frac{x}{2} \neq (k + \frac{1}{2})\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ - also bekommt man

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)} = \left[\ln \left| \frac{\tan(\frac{x}{2}) + 1}{\tan(\frac{x}{2}) - 1} \right| \right]_0^{\pi/4} = \ln \left| \frac{\tan(\frac{\pi}{8}) + 1}{\tan(\frac{\pi}{8}) - 1} \right| - \ln \left| \frac{1}{-1} \right| = \ln \left| \frac{\tan(\frac{\pi}{8}) + 1}{\tan(\frac{\pi}{8}) - 1} \right|.$$

Aus den Additionstheoremen für cos und sin bekommt man

$$\frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2) - [\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)]}{2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)} = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \tan(\alpha/2).$$

Weil $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ (Aufgabe 1, Blatt 1), hat man $\tan(\pi/8) = (1 - 1/\sqrt{2})/(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$, und damit

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)} = \ln \left| \frac{(\sqrt{2} - 1) + 1}{(\sqrt{2} - 1) - 1} \right| = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Als nächstes bemerkt man, daß $\frac{\pi}{2} = (k + \frac{1}{2})\pi$ für $k = 0$, und daß $\pi \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Also muss man das Integral $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$ teilen:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} &= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{\cos x} + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi-a} \frac{dx}{\cos x} + \lim_{b \rightarrow 0} \int_{\pi+b}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\ln \left| \frac{\tan(\frac{x}{2}) + 1}{\tan(\frac{x}{2}) - 1} \right| \right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi-a} + \lim_{b \rightarrow 0} \left[\ln \left| \frac{\tan(\frac{x}{2}) + 1}{\tan(\frac{x}{2}) - 1} \right| \right]_{\pi+b}^{\frac{5\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Mit l'Hôpital bekommt man ($\frac{d}{dt} \tan(t) = 1 + \tan^2(t)$)

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \left| \frac{\tan(\frac{\pi-a}{2}) + 1}{\tan(\frac{\pi-a}{2}) - 1} \right| &= \lim_{a \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{\pi-a}{2}))}{\frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{\pi-a}{2}))} \right| = 1, \\ \lim_{b \rightarrow 0} \left| \frac{\tan(\frac{\pi+b}{2}) + 1}{\tan(\frac{\pi+b}{2}) - 1} \right| &= \lim_{b \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{\pi+b}{2}))}{\frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{\pi+b}{2}))} \right| = 1, \end{aligned}$$

und daher (weil $\ln 1 = 0$)

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \frac{\tan(\frac{5\pi}{8}) + 1}{\tan(\frac{5\pi}{8}) - 1} \right| - \ln \left| \frac{\tan(\frac{3\pi}{8}) + 1}{\tan(\frac{3\pi}{8}) - 1} \right|.$$

Es folgt aus dem Additionstheorem für \tan , und $\tan(\pi/4) = 1$ (Ausgabe 1, Blatt 1), daß

$$\begin{aligned} \tan(3\pi/8) &= \tan(\pi/4 + \pi/8) = \frac{\tan(\pi/4) + \tan(\pi/8)}{1 - \tan(\pi/4) \tan(\pi/8)} = \frac{1 + \tan(\pi/8)}{1 - \tan(\pi/8)} \Rightarrow \\ \frac{\tan(\frac{3\pi}{8}) + 1}{\tan(\frac{3\pi}{8}) - 1} &= \frac{\frac{1 + \tan(\pi/8)}{1 - \tan(\pi/8)} + 1}{\frac{1 + \tan(\pi/8)}{1 - \tan(\pi/8)} - 1} = \frac{1}{\tan(\pi/8)} \Rightarrow \\ \ln \left| \frac{\tan(\frac{3\pi}{8}) + 1}{\tan(\frac{3\pi}{8}) - 1} \right| &= \ln \left| \frac{1}{\tan(\pi/8)} \right| = -\ln(\tan(\pi/8)) = -\ln(\sqrt{2} - 1), \\ \tan(5\pi/8) &= \tan(\pi/4 + 3\pi/8) = \frac{\tan(\pi/4) + \tan(3\pi/8)}{1 - \tan(\pi/4) \tan(3\pi/8)} = \frac{1 + \tan(3\pi/8)}{1 - \tan(3\pi/8)} \Rightarrow \\ \frac{\tan(\frac{5\pi}{8}) + 1}{\tan(\frac{5\pi}{8}) - 1} &= \frac{\frac{1 + \tan(3\pi/8)}{1 - \tan(3\pi/8)} + 1}{\frac{1 + \tan(3\pi/8)}{1 - \tan(3\pi/8)} - 1} = \frac{1}{\tan(3\pi/8)} \Rightarrow \\ \ln \left| \frac{\tan(\frac{5\pi}{8}) + 1}{\tan(\frac{5\pi}{8}) - 1} \right| &= \ln \left| \frac{1}{\tan(3\pi/8)} \right| = -\ln(\tan(3\pi/8)) \\ &= -\ln \left(\frac{1 + \tan(\pi/8)}{1 - \tan(\pi/8)} \right) = -\ln \left(\frac{1 + (\sqrt{2} - 1)}{1 - (\sqrt{2} - 1)} \right) = -\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right) = \ln(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} &= \ln \left| \frac{\tan(\frac{5\pi}{8}) + 1}{\tan(\frac{5\pi}{8}) - 1} \right| - \ln \left| \frac{\tan(\frac{3\pi}{8}) + 1}{\tan(\frac{3\pi}{8}) - 1} \right| \\ &= \ln(\sqrt{2} - 1) - (-\ln(\sqrt{2} - 1)) = \underline{2 \ln(\sqrt{2} - 1)}. \end{aligned}$$

Andere möglichkeit:

$$\begin{aligned} \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \frac{du}{\cos u} &= \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{du}{\cos u} + \int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{du}{\cos u} \\ &= \int_{\pi/4}^0 \frac{-dx}{\cos(\pi - x)} + \int_0^{\pi/4} \frac{dv}{\cos(v + \pi)} = \int_{\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos x} + \int_0^{\pi/4} \frac{dv}{-\cos v} \\ &= -2 \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = -2 \ln(1 + \sqrt{2}) = 2 \ln(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Aufgabe 10: (4 Punkte) Sei $\gamma_n := \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ für $n \in \mathbb{N}$.

- a) Finden Sie durch partielle Integration eine Rekursionsformel für γ_n .
 b) Finden Sie eine explizite Formel für γ_n .

Lösungsvorschlag: a) Durch partielle Integration bekommt man

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \int_0^1 x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-n x^{n-1} e^{-x}) dx = -\frac{1}{e} + n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx \Rightarrow \\ \gamma_n &= n \gamma_{n-1} - \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

b) Unter der Verwendung von der Rekursionsformel in a) kommt man auf der Vermutung:

$$\gamma_n = n! - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \quad (1)$$

Dies beweist man durch Induktion:

$n = 0$:

$$\gamma_0 = \int_0^1 x^0 e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} \cdot \frac{0!}{0!} = 1! - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^0 \frac{0!}{k!}.$$

Induktionsschritt: Angenommen, (1) gilt für n . Von a) und dieser Induktionsannahme bekommt man

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} &= (n+1)\gamma_n - \frac{1}{e} = (n+1)\left(n! - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}\right) - \frac{1}{e} = (n+1)n! - \frac{1}{e} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(n+1)n!}{k!} + 1\right) \\ &= (n+1)! - \frac{1}{e} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!}\right) = (n+1)! + \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!}.\end{aligned}$$

Also gilt (1) auch für $n+1$. Durch Induktion gilt dann (1) für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 11: (4 Punkte) Entscheiden Sie mit Beweis, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx$$

existiert.

Lösungsvorschlag: Man bemerkt zuerst, daß $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx$ endlich ist, weil $\sin(x^2)$ auf $[0, \sqrt{2\pi}]$ stetig ist (als Verknüpfung von zwei stetigen Funktionen).

Sei $a > \sqrt{2\pi}$. Mit der Substitution $t = x^2$ bekommt man

$$\int_{\sqrt{2\pi}}^a \sin(x^2) dx = \int_{2\pi}^{a^2} \sin(t) \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{a^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt. \quad (2)$$

Sei, für $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$a_k^+ := \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt, \quad a_k^- := - \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$$

Weil $\sin(t) \geq 0$ für $t \in [k2\pi, k2\pi + \pi]$, und $\sin(t) \leq 0$ für $t \in [k2\pi + \pi, k2\pi + 2\pi]$, gilt $a_k^+ \geq 0$, $a_k^- \geq 0$. Ausserdem, weil $g(t) := \frac{1}{\sqrt{t}}$ monoton fallend ist, und $f(t) := \sin(t)$ 2π -periodisch ist, gilt (Substitution $u = t - 2\pi$)

$$\begin{aligned}a_{k+1}^+ &= \int_{(k+1)2\pi}^{(k+1)2\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+2\pi}} du \leq \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du = a_k^+, \\ a_{k+1}^- &= - \int_{(k+1)2\pi+\pi}^{(k+1)2\pi+2\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = - \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+2\pi}} du \leq - \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du = a_k^-.\end{aligned}$$

Vom Mittelwertsatz der Integralrechnung bekommt man weiter, daß $\xi_k^+ \in [k2\pi, k2\pi + \pi]$, $\xi_k^- \in [k2\pi + \pi, k2\pi + 2\pi]$ existieren, so daß

$$\begin{aligned} 0 \leq a_k^+ &:= \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\xi_k^+}} \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \sin(t) dt = \frac{2}{\sqrt{\xi_k^+}} \leq \frac{1}{\sqrt{k2\pi}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ 0 \leq a_k^- &:= - \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\xi_k^-}} \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} (-\sin(t)) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\xi_k^-}} \leq \frac{1}{\sqrt{k2\pi + \pi}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also gilt, daß $\{a_k^+\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{a_k^-\}_{k \in \mathbb{N}}$ positive, monoton fallende Nullfolgen sind. Endlich hat man, weil $\sin(s + \pi) = -\sin(s)$ (und mit den Substitutionen $u = t - \pi$, $v = u - \pi$),

$$\begin{aligned} a_{k+1}^+ &= \int_{(k+1)2\pi}^{(k+1)2\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{\sin(u + \pi)}{\sqrt{u + \pi}} du \\ &= \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{-\sin(u)}{\sqrt{u + \pi}} du \leq \int_{k2\pi+\pi}^{k2\pi+2\pi} \frac{-\sin(u)}{\sqrt{u}} du = a_k^- \\ &= \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{-\sin(v + \pi)}{\sqrt{v + \pi}} dv = \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{\sin(v)}{\sqrt{v + \pi}} dv \leq \int_{k2\pi}^{k2\pi+\pi} \frac{\sin(v)}{\sqrt{v}} dv = a_k^+. \end{aligned}$$

Also ist $a_k^+ \geq a_k^- \geq a_{k+1}^+ \geq a_{k+1}^- \geq \dots \geq 0$. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert daher die (alternierende) Reihe $a_1^+ - a_1^- + a_2^+ - a_2^- + a_3^+ - a_3^- + \dots$.

Kehren wir jetzt zu (2) zurück. Für $a > 0$ gibt es *ein* $k_0 = k_0(a) \in \mathbb{N}$, so daß $2\pi k_0 \leq a^2 < 2\pi(k_0 + 1)$. Für dies gilt: $a \rightarrow \infty \Rightarrow k_0(a) \rightarrow \infty$. Weiter ist dann (siehe (2))

$$\int_{\sqrt{2\pi}}^a \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{a^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{k_0-1} (a_k^+ - a_k^-) + \int_{2\pi k_0}^{a^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \right]$$

Jetzt ist

$$0 \leq \left| \int_{2\pi k_0}^{a^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \int_{2\pi k_0}^{a^2} \left| \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \right| dt \leq \int_{2\pi k_0}^{2\pi(k_0+1)} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_0}} \rightarrow 0, \quad k_0 \rightarrow \infty.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\sqrt{2\pi}}^a \sin(x^2) dx &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{k_0-1} (a_k^+ - a_k^-) \right) + \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_{2\pi k_0}^{a^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) < \infty. \end{aligned}$$

Damit existiert das Integral $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$ als die Summe von den Integralen $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx$ und $\int_{\sqrt{2\pi}}^\infty \sin(x^2) dx$.

Weil (durch die Substitution $u = -x$)

$$\int_{-a}^{-\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx = \int_{\sqrt{2\pi}}^a \sin(u^2) du,$$

existiert auch das Integral $\int_{-\infty}^0 \sin(x^2) dx$, und damit auch das Integral $\int_{-\infty}^\infty \sin(x^2) dx$ als die Summe von $\int_{-\infty}^0 \sin(x^2) dx$ und $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$.

Aufgabe 12: (4 Punkte) Berechnen Sie Stammfunktionen auf geeigneten (d. h. den maximal möglichen) Intervallen zu folgenden Funktionen:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 2}$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Lösungsvorschlag:

(a) Weil $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ hat der Nenner keine reellen Nullstellen. Also ist die Stammfunktion überall definiert, und man bekommt (durch die Substitution $u = x - 1$ in beide Integralen)

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx &= \int \frac{x - 1}{(x - 1)^2 + 1} dx + \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 1} = \int \frac{u du}{u^2 + 1} + \int \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + \arctan(u) + C = \frac{1}{2} \ln((x - 1)^2 + 1) + \arctan(x - 1) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + \arctan(x - 1) + C. \end{aligned}$$

(Die zwei Integrale sind im Aufgabe 4 im 2. Tutorium bestimmt worden). Man überprüft durch Differenzieren, daß dies eine Stammfunktion ist.

(b) Man sieht, daß $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$, und daß weder $x = 1$ noch $x = -1$ Nullstellen von $3x^2 - 3x - 2$ sind. Die Stammfunktion wird dann auf $] - \infty, -1[\cup] - 1, 1[\cup] 1, \infty[$ definiert sein.

Man rechnet:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} \\ \Rightarrow 3x^2 - 3x - 2 &= A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \Rightarrow \begin{cases} A + C = 3 \\ B - 2C = -3 \\ -A + B + C = -2 \end{cases} \\ \Rightarrow A = 2, B = -1, C = 1 &\Rightarrow \\ \int \frac{3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} &= 2 \int \frac{dx}{x - 1} - \int \frac{dx}{(x - 1)^2} + \int \frac{dx}{x + 1} \\ &= 2 \ln|x - 1| + \frac{1}{x - 1} + \ln|x + 1| + C. \end{aligned}$$

Man überprüft durch Differenzieren, daß dies eine Stammfunktion ist (auf $] - \infty, -1[\cup] - 1, 1[\cup] 1, \infty[$).

Abgabe bis Montag 02.02.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.

Unter <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen> sind die Blätter im Internet abrufbar.

Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318

T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335