Mathematisches Institut LMU 19.04.2005
Prof. Dr. H. Steinlein

Übungsblatt 2 zu MPIIA

Aufgabe 5: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine Lebesguesche Nullmenge ist.

b) Sei $K_0 = [0,1]$. Man entferne aus K_0 das offene mittlere Drittel $I_{0,1} :=]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Es bleiben die 2^1 abgeschlossenen Intervalle $K_{0,1} = [0, \frac{1}{3}], K_{0,2} = [\frac{2}{3}, 1]$. Aus diesen Intervallen entferne man beim zweiten Schritt wieder jeweils das offene mittlere Drittel $I_{1,1} :=]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\, , I_{1,2} :=]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, und es bleiben die 2^2 abgeschlossenen Intervalle $K_{1,1} = [0, \frac{1}{9}], K_{1,2} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], K_{1,3} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], K_{1,4} = [\frac{8}{9}, 1]$. Aus jedem dieser Intervalle entferne mann wieder das offene mittlere Drittel und so fort. Formal, sei

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n+1}} K_{n,j} = K_0 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}.$$

Zeigen Sie, daß C eine Lebesguesche Nullmenge ist.

Lösungsvorschlag: a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist *abzählbar*; sei also $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$. Sei $\epsilon > 0$, und definiere Intervalle $I_j =]\, a_j, b_j [:=]\, r_j - \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^j}, r_j + \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^j} [\, , j = 1, 2, 3, \ldots$. Weil $r_j \in I_j, j \in \mathbb{N}$, ist $\mathbb{Q} \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} I_j$. Weil

$$\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big[\big(r_j + \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^j}\big) - \big(r_j - \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^j}\big) \Big] = \sum_{j=1}^{\infty} \big(2 \cdot \frac{\epsilon}{3}\big) \frac{1}{2^j}$$
$$= \frac{2\epsilon}{3} \sum_{j=1}^{\infty} \big(\frac{1}{2}\big)^j = \frac{2\epsilon}{3} \big(\frac{1}{1 - 1/2} - 1 \big) = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon,$$

ist $\mathbb{Q}$ eine Lebesguesche Nullmenge.

b) Man sieht, daß für jedes $N \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{n=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{2^{n+1}} K_{n,j} = \bigcup_{j=1}^{2^{N+1}} K_{N,j},$$

und deswegen ist $C \subset \bigcup_{j=1}^{2^{N+1}} K_{N,j}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Für N fest, ist die Länge vom Intervall $K_{N,j}$ gleich $\frac{1}{3^{N+1}} = \big(\frac{1}{3}\big)^{N+1}$, unabhängig von j. Es gibt, wieder für $N \in \mathbb{N}$ fest, insgesamt 2^{N+1} Intervalle, $K_{N,1}, \ldots, K_{N,2^{N+1}}$.

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so daß $N + 1 > \frac{\ln \epsilon}{\ln(8/9)}$ (dann ist $\big(\frac{8}{9}\big)^{N+1} < \epsilon$). Wähle offene Intervalle $I_j =]a_j, b_j[\, , j = 1, \ldots, 2^{N+1}$, jede von Länge $b_j - a_j = \big(\frac{4}{9}\big)^{N+1}$ ($> \big(\frac{3}{9}\big)^{N+1} = \big(\frac{1}{3}\big)^{N+1}$), so daß $I_j \supseteq K_{N,j}$ (möglich, weil die Länge von $K_{N,j}$ kleiner ist als die Länge von I_j).

Damit hat man

$$\bigcup_{j=1}^{2^{N+1}} I_j \supseteq \bigcup_{j=1}^{2^{N+1}} K_{N,j} \supseteq C,$$

und

$$\sum_{j=1}^{2^{N+1}} (b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{2^{N+1}} \big(\frac{4}{9}\big)^{N+1} = 2^{N+1} \cdot \big(\frac{4}{9}\big)^{N+1} = \big(\frac{8}{9}\big)^{N+1} < \epsilon.$$

Also ist C eine Lebesguesche Nullmenge.

Aufgabe 6: (4 Punkte) Seien $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie:

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \text{für alle } x, y \ge 0,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $y = x^{p-1}$. Hinweis: Für $y > 0$ betrachte man die Funktion $f_y(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$.
Im Falle $p = 2$ gebe man einen Beweis obiger Aussage, der (ohne Lupe lesbar) in eine Zeile paßt.
Lösungsvorschlag: Wenn $y = 0$ ist, hat man, für alle $x \ge 0$,

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} = \frac{x^p}{p} \ge 0 = xy.$$

Wenn $y > 0$ ist, sei $f_y(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_y'(x) &= p \cdot \frac{x^{p-1}}{p} - y = x^{p-1} - y, \\ f_y''(x) &= (p-1)x^{p-2}. \end{aligned}$$

Aus $f_y'(x_0) = 0$ folgt $y = x_0^{p-1}$, also $x_0 = y^{\frac{1}{p-1}}$. Weil $x \ge 0$ und $p > 1$, ist $f_y''(x) > 0$, und damit ist x_0 ein *Minimum* von f_y. Also ist, für alle $x \ge 0$,

$$\begin{aligned} \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy = f_y(x) \ge f_y(x_0) &= \frac{(y^{\frac{1}{p-1}})^p}{p} + \frac{y^q}{q} - (y^{\frac{1}{p-1}})y && (1) \\ &= \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = \frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^q = \big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\big)y^q = 0. && (2) \end{aligned}$$

Hier wurde verwendet, daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, wovon folgt, daß

$$\begin{aligned} &\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p}{p} - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow \frac{p}{p-1} = q, \\ &\frac{1}{p-1} + 1 = \frac{1}{p-1} + \frac{p-1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (1) ist die erwünschte. Gleichheit gilt nur für $y = x^{p-1}$ (einziges Minimum von f_y).

Für $q = p = 2$:

$$0 \le (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \ge xy.$$

Aufgabe 7: (4 Punkte) Geben Sie Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ an, die folgende Eigenschaften haben (mit Begründung):

(a) f beschränkt, aber nicht integrierbar auf $[0, 1]$.

(b) f integrierbar auf $[0, 1]$ und f ist weder monoton noch stetig.

Lösungsvorschlag: (a) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0\,, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Offentsichtlich ist f beschränkt, denn $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in [0,1]$. f ist aber nicht integrierbar: denn, sei ϕ eine Treppenfunktion, mit $\phi \leq f$. Weil $\mathbb{Q}$ dicht in $[0,1]$ ist, und ϕ konstant auf Intervallen ist, muss gelten, daß $\phi(x) \leq 0$, und damit

$$\int_{0\ *}^{1} f(x)\,dx := \inf\Big\{ \int_0^1 \phi(x)\,dx \,\Big|\, \phi \in T[0,1], \phi \leq f \Big\} \leq 0.$$

Analog bekommt man, daß wenn $\psi \in T[0,1]$ mit $f \leq \psi$, dann folgt $\psi \geq 1$, und daher $\int_0^{1*} f(x)\,dx \geq 1$. Da $\int_0^{1*} f(x)\,dx \neq \int_{0\ *}^{1} f(x)\,dx$, ist f nicht integrierbar.

(b) Es reicht eine nicht-monotone Treppenfunktion zu nehmen, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 1\ , & x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 0\ , & x \in]\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Die ist integrierbar, aber weder stetig noch monoton.

Aufgabe 8: (4 Punkte) Man beweise (*ohne* Differentialrechnung) die Gleichung

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Anleitung: Man setze $x = \tan y$ und betrachte die Zerlegung $Z_n:\ t_k = \tan(ky/n), k = 0, \ldots, n$. Man überlege, daß $\sum (t_k - t_{k-1})/(1 + t_{k-1}t_k)$ eine Riemannsche Summe ist, und zeige mit dem Additionstheorem, daß $(t_k - t_{k-1})/(1 + t_{k-1}t_k) = \tan(y/n)$ ist (unabhängig von k).

Lösungsvorschlag: Sei zuerst $x > 0$ (der Beweis ist für $x < 0$ analog). $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ ist bijektiv, also gibt es $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mit $x = \tan y$. Sei $n \in \mathbb{N}$, und $t_k := \tan(ky/n), k = 0, \ldots, n$. Wir behaupten, daß $\{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung von $[0,x]$ definiert. Zuerst ist $t_0 = \tan(0) = 0$, und $t_n = \tan(n \cdot y/n) = \tan(y) = x$; weiter ist tan monoton *wachsend*, also ist (weil $0 < y/n < 2y/n < \ldots < (n-1)y/n < ny/n = y$), $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$. Weiter behaupten wir, es gibt eine Konstante (nur von y abhängig) so daß $\max\{t_j - t_{j-1} \,|\, j = 1, \ldots, n\} < C/n$. Sei nämlich $C := y \cdot \max_{s\in[0,y]} |\tan'(s)|$. Dann gibt es, dank Mittelwertsatz, ein $\xi = \xi(j) \in](j-1)y/n, jy/n[$ so daß

$$\begin{aligned} t_j - t_{j-1} &= \tan\big(\frac{jy}{n}\big) - \tan\big(\frac{(j-1)y}{n}\big) = \tan'(\xi) \cdot \Big(\frac{jy}{n} - \frac{(j-1)y}{n}\Big) \\ &\leq \cdot \max_{s\in[0,y]} |\tan'(s)| \cdot \frac{y}{n} \equiv C/n. \end{aligned}$$

Weil $t_j > t_{j-1}$ ist, bekommt man $t_j^2 > t_j t_{j-1} > t_{j-i}^2$ und damit

$$f(t_j) = \frac{1}{1+t_j^2} < \frac{1}{1+t_j t_{j-1}} < \frac{1}{t_{j-1}^2} = f(t_{j-1}).$$

Weil

$$\eta_j := \frac{1}{1+t_j t_{j-1}} \in \big[\inf f([t_{j-1}, t_j]), \sup f([t_{j-1}, t_j])\big]$$

ist

$$\sum_{j=0}^{n} \eta_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t_j - t_{j-1}}{1+t_j t_{j-1}}$$

eine Zwischensumme. Jetzt ist aber, mit dem Additionstheorem $\tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$,

$$\frac{t_j - t_{j-1}}{1+t_j t_{j-1}} = \frac{\tan(jy/n) - \tan((j-1)y/n)}{1+\tan(jy/n)\tan((j-1)y/n)} = \tan\big([jy/n] - [(j-1)y/n]\big) = \tan(y/n).$$

Damit bekommt man

$$\sum_{j=0}^{n} \eta_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=0}^{n} \tan(y/n) = n \cdot \tan(y/n),$$

und, weil $y/n \to 0, n \to \infty$,

$$\begin{aligned} n \cdot \tan(y/n) &= y \frac{\tan(\frac{y}{n})}{y/n} = y \frac{\tan(\frac{y}{n}) - \tan(0)}{y/n - 0} \to y \cdot \tan'(t)|_{t=0} \\ &= \frac{y}{\cos^2(0)} = y, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Aus Satz V.1.14 folgt, daß (weil $\max\{t_j - t_{j-1} \,|\, j = 1, \ldots, n\} \to 0, n \to \infty$, wie oben gezeigt),

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \eta_j (t_j - t_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \tan(y/n) = y = \arctan x.$$

Abgabe bis Montag 25.04.2005, *11.15* Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` sind die Blätter im Internet abrufbar.

Sprechstunden:	**H. Steinlein:**	**Mo 10-11, Zimmer 318**
	T. Sørensen:	**Mi 14-15, Zimmer 335**