Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein

19.04.2005

Übungsblatt 2 zu MPIIA

Aufgabe 5: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine Lebesguesche Nullmenge ist.

b) Sei $K_0 = [0,1]$. Man entferne aus K_0 das offene mittlere Drittel $I_{0,1} :=]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Es bleiben die 2^1 abgeschlossene Intervalle $K_{0,1} = [0, \frac{1}{3}], K_{0,2} = [\frac{2}{3}, 1]$. Aus diesen Intervallen entferne man beim zweiten Schritt wieder jeweils das offene mittlere Drittel $I_{1,1} :=]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[, I_{1,2} :=]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, und es bleiben die 2^2 abgeschlossene Intervalle $K_{1,1} = [0, \frac{1}{9}], K_{1,2} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], K_{1,3} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], K_{1,4} = [\frac{8}{9}, 1]$. Aus jedem dieser Intervallen entferne mann wieder das offene mittlere Drittel und so fort. Formal, sei

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n+1}} K_{n,j} = K_0 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}.$$

Zeigen Sie, daß C eine Lebesguesche Nullmenge ist.

Aufgabe 6: (4 Punkte) Seien $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \text{für alle } x, y \geq 0,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $y = x^{p-1}$. Hinweis: Für $y > 0$ betrachte man die Funktion $f_y(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$.
Im Falle $p = 2$ gebe man einen Beweis obiger Aussage, der (ohne Lupe lesbar) in einer Zeile paßt.

Aufgabe 7: (4 Punkte) Geben Sie Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, die folgende Eigenschaften haben (mit Begründung):

(a) f beschränkt, aber nicht integrierbar auf $[0,1]$.

(b) f integrierbar auf $[0,1]$ und f ist weder monoton noch stetig.

Aufgabe 8: (4 Punkte) Man beweise (*ohne* Differentialrechnung) die Gleichung

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Anleitung: Man setze $x = \tan y$ und betrachte die Zerlegung $Z_n : \ t_k = \tan(ky/n), k = 0, \ldots, n$. Man überlege, daß $\sum (t_k - t_{k-1})/(1 + t_{k-1}t_k)$ eine Riemannsche Summe ist, und zeige mit dem Additionstheorem, daß $(t_k - t_{k-1})/(1 + t_{k-1}t_k) = \tan(y/n)$ ist (unabhängig von k).

Abgabe bis Montag 25.04.2005, *11.15* Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` sind die Blätter im Internet abrufbar.
Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335