Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein 11.04.2005

Übungsblatt 1 zu MPIIA

Aufgabe 1: (4 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die exakten Werte von $\sin x, \cos x, \tan x$ an den Stellen $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$.

b) Zeigen Sie, daß für $x, y \in]-1,1[$ gilt:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \tag{1}$$

(Hinweis: IV.3.14c).
Leiten Sie hiermit die Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \text{ her.}$$

Berechnen Sie damit und mit der Reihendarstellung vom Arcustangens π auf 8 Stellen (Herleitung, Fehlerabschätzung, Taschenrechner).

Lösungsvorschlag: a) Aus $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ und $e^{i(x+y)} = e^{ix}\cdot e^{iy}$ folgt

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x \quad , \quad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$

und damit

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= \cos(\pi + (-x)) = \cos\pi\cos(-x) - \sin\pi\sin(-x) = -\cos(-x) = -\cos x,\\ \sin(\pi - x) &= \sin(\pi + (-x)) = \sin\pi\cos x + \sin(-x)\cos\pi = -\sin(-x) = \sin x,\end{aligned}$$

weil $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$, und cos gerade und sin ungerade ist.

Damit ist

$$\sin(\tfrac{\pi}{3}) = \sin(\pi - \tfrac{\pi}{3}) = \sin(\tfrac{2\pi}{3}) = \sin(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{3}) + \sin(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{3}) = 2\sin(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{3}),$$

und damit (da $\sin(\frac{\pi}{3}) \neq 0$ weil $0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$), $1 = 2\cos(\frac{\pi}{3})$; also ist $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Aus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ folgt dann $\sin(\frac{\pi}{3}) = \pm\sqrt{1 - 1/4}$; denn mit $0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ ist $\sin(\frac{\pi}{3})$ positiv, also $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Damit ist $\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$.

Weiter hat man,

$$1 = \sin(\tfrac{\pi}{2}) = \sin(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4}) = \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{4}) = 2\sin(\tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{4}), \tag{2}$$

$$0 = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4}) = \cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{4}) - \sin(\tfrac{\pi}{4})\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \cos^2(\tfrac{\pi}{4}) - \sin^2(\tfrac{\pi}{4}). \tag{3}$$

Aus (3) folgt, daß $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \sin^2(\frac{\pi}{4})$, und damit (weil $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$) daß $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$. Aus (2) folgt dann, daß $\sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, und damit hat man $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{4})$. Dann ist $\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = 1$.

Man bekommt weiter, daß

$$\begin{cases}\frac{1}{2} &= \cos(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6})\sin(\frac{\pi}{6}) = \cos^2(\frac{\pi}{6}) - \sin^2(\frac{\pi}{6}),\\ 1 &= \cos^2(\frac{\pi}{6}) + \sin^2(\frac{\pi}{6})\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{3}{2} = 2\cos^2(\frac{\pi}{6}),\\ \frac{1}{2} = 2\sin^2(\frac{\pi}{6})\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \cos(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \sin(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{1}{2} \quad \tan(\tfrac{\pi}{6}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Weil $0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, ist $\cos(\frac{\pi}{6}) > 0, \sin(\frac{\pi}{6}) > 0$).

Endlich hat man,

$$\begin{aligned}\sin(\tfrac{\pi}{5}) &= \sin(\pi - \tfrac{\pi}{5}) = \sin(\tfrac{4\pi}{5}) = \sin(\tfrac{2\pi}{5} + \tfrac{2\pi}{5}) = 2\sin(\tfrac{2\pi}{5})\cos(\tfrac{2\pi}{5}) \\ &= 2\sin(\tfrac{\pi}{5} + \tfrac{\pi}{5})\cos(\tfrac{\pi}{5} + \tfrac{\pi}{5}) = 2\big[2\sin(\tfrac{\pi}{5})\cos(\tfrac{\pi}{5})\big]\big[2\cos^2(\tfrac{\pi}{5}) - 1\big].\end{aligned}$$

Da $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ ist, gilt $\sin(\frac{\pi}{5}) \neq 0$, und es folgt, daß

$$u^3 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8} = 0, \quad u = \cos(\tfrac{\pi}{5}).$$

Man sieht, daß $u = -\frac{1}{2}$ eine Lösung ist; man faktorisiert dann $p(u) = u^3 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}$ und bekommt

$$(x + \tfrac{1}{2})(x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}) = 0, \quad u = \cos(\tfrac{\pi}{5}).$$

Also ist $u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = (1 + \sqrt{5})/4, u_3 = (1 - \sqrt{5})/4$. Wegen $u = \cos(\frac{\pi}{5}) > 0$, ist also $\cos(\frac{\pi}{5}) = u_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Aus $\cos(t)^2 + \sin^2(t) = 1$ folgt dann $\sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Damit ist dann

$$\tan(\tfrac{\pi}{5}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{5})}{\cos(\frac{\pi}{5})} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{4}}}{1 + \sqrt{5}}.$$

b) IV.3.14c besagt, daß

$$\tan(\xi + \eta) = \frac{\tan\xi + \tan\eta}{1 - \tan\xi \cdot \tan\eta}.$$

Mit $x = \tan\xi, y = \tan\eta$ folgt

$$\begin{aligned}\arctan\big(\frac{x + y}{1 - xy}\big) &= \arctan\big(\frac{\tan\xi + \tan\eta}{1 - \tan\xi \cdot \tan\eta}\big) \\ &= \arctan(\tan(\xi + \eta)) = \xi + \eta = \arctan(x) + \arctan(y).\end{aligned}$$

Aus (1) folgt, mit $x = y = \frac{1}{5}$,

$$2\arctan\big(\frac{1}{5}\big) = \arctan\big(\frac{1/5 + 1/5}{1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}\big) = \arctan\big(\frac{5}{12}\big),$$

und mit $x = y = \frac{5}{12}$,

$$2\arctan(\frac{5}{12}) = \arctan\big(\frac{5/12 + 5/12}{1 - \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}}\big) = \arctan\big(\frac{120}{119}\big),$$

und damit

$$4\arctan\big(\frac{1}{5}\big) = 2\arctan\big(\frac{5}{12}\big) = \arctan\big(\frac{120}{119}\big).$$

Mit $x = 1, y = \frac{1}{139}$ folgt

$$\arctan(1) + \arctan\big(\frac{1}{139}\big) = \arctan\big(\frac{1 + 1/139}{1 - 1/139}\big) = \arctan\big(\frac{120}{119}\big).$$

Also ist

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \arctan\big(\frac{120}{119}\big) - \arctan\big(\frac{1}{139}\big) = 4\arctan\big(\frac{1}{5}\big) - \arctan\big(\frac{1}{139}\big).$$

Es folgt, daß

$$\pi = 16\arctan\big(\frac{1}{5}\big) - 4\arctan\big(\frac{1}{239}\big). \tag{4}$$

Die Reihe für arctan ist

$$\arctan x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \tfrac{1}{11}x^{11} + \cdots$$

Wir rechnen jetzt die ersten Glieder im Falle $x = \frac{1}{5}$ und $x = \frac{1}{239}$ aus (bei $\frac{1}{5}$ multiplizieren wir gleich mit 16, und bei $\frac{1}{239}$ mit 4, siehe (4)):

$$\begin{array}{rl}
5: & \underline{n=1}(+) : \dfrac{16}{5} = 3,2 \\
& \underline{n=3}(-) : \dfrac{16}{3\cdot 5^3} = \dfrac{2^7}{3\cdot 10^3} = \dfrac{128}{3}\cdot 10^{-3} = 0,0426666667 \\
& \underline{n=5}(+) : \dfrac{16}{5\cdot 5^5} = \dfrac{2^{10}}{10^6} = 0,0010240000 \\
& \underline{n=7}(-) : \dfrac{16}{7\cdot 5^7} = \dfrac{2^{11}}{7\cdot 10^7} = \dfrac{2048}{7\cdot 10^7} = 0,0000292571 \\
& \underline{n=9}(+) : \dfrac{16}{9\cdot 5^9} = \dfrac{2^{13}}{9\cdot 10^9} = \dfrac{8192}{9\cdot 10^9} = 0,0000009102 \\
& \underline{n=11}(-) : \dfrac{16}{11\cdot 5^{11}} = \dfrac{2^{15}}{11\cdot 10^{11}} = \dfrac{32768}{11\cdot 10^{11}} = 0,0000000298 \\
* & \underline{n=13} \quad : \dfrac{16}{13\cdot 5^{13}} = \dfrac{2^{17}}{13\cdot 10^{13}} = \dfrac{131072}{13\cdot 10^{13}} = 0,0000000010 \\
239: & \underline{n=1}(-) : \dfrac{4}{239} = 0,0167364017 \\
& \underline{n=3}(+) : \dfrac{4}{3\cdot 239^3} = \dfrac{4}{40955757} = 0,0000000977 \\
* & \underline{n=5} \quad : \dfrac{4}{5\cdot 239^5} = \dfrac{4}{389905632600} = 0,000000000001
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl}
3,2000000000 & & 0,0426666667 & & \\
+0,0010240000 & & +\,0,0000292571 & & \\
+0,0000009102 & & +\,0,0000000298 & & \\
+0,0000000977 & & +\,0,0167364017 & & \\
*********** & & ********** & & \\
3,2010250079 & - & 0,0594323553 & = & 3,14159265\ 36
\end{array}$$

Bei einer alternierenden Reihe ist der Fehler bei Nährung durch endlich viele Terme kleiner als der Absolutbetrag vom ersten weggelassenen Term; der oben begangene Fehler ist also kleiner als die Summe von die zwei Termen die mit $*$ markiert sind - also, $0,0000000010 + 0,000000000001 = 0,000000001001$, also stimmt das Resultat auf 8 Stellen. (Man bekommt am Taschenrechner $\pi = 3,14159265\ 359....$ - stimmt also in Wirklichkeit auch auf mehrere Stellen.)

Aufgabe 2: (4 Punkte) Beweisen Sie die Formel von C. L. Dodgson, alias Lewis Caroll (Autor von “Alice im Wunderland”):

$$\arctan\frac{1}{p} = \arctan\frac{1}{p+m} + \arctan\frac{1}{p+n} \text{ wobei } p, m, n \in \mathbb{N} \text{ und } p^2 + 1 = mn.$$

Lösungsvorschlag: Sei $x = \frac{1}{p+m}, y = \frac{1}{p+n}$ $(x, y \in]0,1[\,)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{1-xy} &= \frac{\frac{1}{p+m} + \frac{1}{p+n}}{1 - \frac{1}{p+m}\frac{1}{p+n}} = \frac{(p+n)+(p+m)}{(p+n)(p+m)-1} = \frac{2p+n+m}{p^2+np+mp+mn-1} \\
&= \frac{2p+n+m}{2p^2+np+mp} \quad (\text{ weil } p^2+1 = nm \Rightarrow nm-1 = p^2) \\
&= \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Aus 1 b) folgt dann

$$\arctan(\frac{1}{p}) = \arctan\big(\frac{x+y}{1-xy}\big) = \arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\big(\frac{1}{p+m}\big) + \arctan\big(\frac{1}{p+n}\big).$$

Aufgabe 3: (4 Punkte) Beweisen Sie die folgende Darstellung der Areafunktionen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsinh} x &= \log(x + \sqrt{x^2+1})\ ,\ x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{Arcosh} x &= \log(x + \sqrt{x^2-1})\ , x \in [1,\infty[, \\ \operatorname{Artanh} x &= \frac{1}{2}\log\big(\frac{1+x}{1-x}\big)\ ,\ x \in]-1,1[\ , \\ \operatorname{Arcoth} x &= \frac{1}{2}\log\big(\frac{x+1}{x-1}\big)\ ,\ x \in]1,\infty[\,. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag: Sei $y = \operatorname{Arsinh}(x)$, also $x = \sinh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ oder mit $u = e^y\,(>0)$, $u^2 - 2xu - 1 = 0$. Also ist $u = x + \sqrt{x^2+1}$ (das Minuszeichen entfällt, da $u > 0$ ist), und $\log u = y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

Sei $y = \operatorname{Arcosh}(x)$, also $x = \cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ oder mit $u = e^y\,(>0)$, $u^2 - 2xu + 1 = 0$. Also ist $u = x + \sqrt{x^2-1}$ (das Minuszeichen entfällt wie oben), und $\log u = y = \log(x + \sqrt{x^2-1})$.

Sei $y = \operatorname{Artanh}(x)$, also

$$x = \tanh(y) = \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{(e^y)^2 - 1}{(e^y) + 1},$$

oder mit $u = e^y\,(>0)$, $u^2(1-x) = 1 + x$. Also ist $u^2 = \frac{1+x}{1-x}$, und $y = \log u = \frac{1}{2}\log u^2 = \frac{1}{2}\log\big(\frac{1+x}{1-x}\big)$.

Sei $y = \operatorname{Arcoth}(x)$, also

$$x = \coth(y) = \frac{\cosh(y)}{\sinh(y)} = \frac{(e^y)^2+1}{(e^y)^2-1} = \frac{u^2+1}{u^2-1},\ u = e^y\ (>0).$$

Also ist $u^2(x-1) = x + 1$ und $y = \log u = \frac{1}{2}\log u^2 = \frac{1}{2}\log\big(\frac{x+1}{x-1}\big)$.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Eine *Hamilton-Funktion* ist eine C^1-Funktion $H : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$ offene Menge). Das zugehörige (ebene) *hamiltonsche System* besteht aus den (gekoppelten) Differenzialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases} \tag{5}$$

Diese beschreiben die Bewegung des Punktes (x,y) in der Ebene als Funktion der Zeit.

a) Gegeben eine Lösung $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ zu (5). Zeigen Sie, daß die Hamilton-Funktion H längs dieser Lösung konstant ist.

b) Sei $H(x,y) = y^2/2 - \cos x$. Leiten Sie das zugehörige *hamiltonsche System* her.

c) Einen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial H}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ nennt man eine *Ruhelage* (warum?). Zeigen Sie, daß $(x,y) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$, für die oben definierte Hamilton-Funktion alle Ruhelagen sind.

d) Aus a) folgt, daß jede Trajektorie $\{(x(t), y(t)\,|\,t \in I\}$ einer Lösung $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge einen geeigneter Niveaumenge

$$N_c := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,|\,H(x,y) = c\} \tag{6}$$

sein muß. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß $\{(x, \pm\alpha\cos(x/2))\,|\,x \in \mathbb{R}\}$ die Niveaumenge N_1 ist.

Zusatzaufgabe, ohne Punkte: Skizzieren Sie die Niveaumengen für $c = -1, 0, 1$ und 2.

Lösungsvorschlag:
a) Sei $g(t) = H\big(x(t), y(t)\big),\ g : I \to \mathbb{R}$, dann ist, mit der Kettenregel, und Verwendung von (5) (weil (x, y) eine Lösung ist; $\dot{x} \equiv x'$)

$$g'(t) = \frac{\partial H}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) \cdot y'(t) = -\dot{y}(t)x'(t) + \dot{x}(t)y'(t) = 0,$$

also ist g eine Konstante; d.h., H ist längs die Lösung konstant.
b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\big(y^2/2 - \cos(x)\big) = \sin(x),\\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\big(y^2/2 - \cos x\big) = y,\end{aligned}$$

und damit ist das zugehörige *hamiltonsche System*

$$\begin{cases}\dot{x} = y\\ \dot{y} = -\sin(x)\end{cases} \tag{7}$$

Dieses entspricht einem *Mathematischen Pendel*, für das der 2. Newtonsche Satz gilt: $\ddot{x} = -\sin(x)$. [Siehe z.B. B. Aulbach: "Gewöhnliche Differenzialgleichungen".]
c) (Wenn $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, dann ist die konstante Abbildung $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0), t \in \mathbb{R}$, eine Lösung des hamiltonschen Systems - deswegen "Ruhelage".) Die Ruhelagen sind genau die Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ wo (siehe (7))

$$\begin{cases}y_0 = 0\\ -\sin(x_0) = 0,\end{cases}$$

also genau $(x, y) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.
d) Man hat $N_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, H(x, y) = 1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}H(x, y) = 1 &\Leftrightarrow y^2/2 = \cos(x) + 1\\ &\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2\cos(x) + 2} = \pm\sqrt{2\cos(2 \cdot \tfrac{x}{2}) + 2}\\ &= \pm\sqrt{2\big(2\cos^2(\tfrac{x}{2}) - 1\big) + 2} = \pm\sqrt{4\cos^2(\tfrac{x}{2})} = \pm 2\cos(\tfrac{x}{2}).\end{aligned}$$

Also, mit $\alpha = 2$ ist $\{(x, \pm\alpha\cos(x/2)) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ die Niveaumenge N_1.

Für die Skizze die Niveaumengen für $c = -1, 0, 1$ und 2, siehe Link Homepage ($N_{-1} = \{(0, 0)\}$ sieht man nicht; die Niveaumengen sind, von innen nach aussen, N_0, N_1, N_2).

Abgabe bis Montag 18.04.2005, *11.15* Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` sind die Blätter im Internet abrufbar.

Sprechstunden:	**H. Steinlein:**	**Mo 10-11, Zimmer 318**
	T. Sørensen:	**Mi 14-15, Zimmer 335**