

Übungsblatt 1 zu MPIIA

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die exakten Werte von $\sin x, \cos x, \tan x$ an den Stellen $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$.
- b) Zeigen Sie, daß für $x, y \in]-1, 1[$ gilt:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \left(\frac{x+y}{1-xy} \right). \quad (1)$$

(Hinweis: IV.3.14c).

Leiten Sie hiermit die Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \text{ her.}$$

Berechnen Sie damit und mit der Reihendarstellung vom Arcustangens π auf 8 Stellen (Herleitung, Fehlerabschätzung, Taschenrechner).

Lösungsvorschlag: a) Aus $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ folgt

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \quad , \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

und damit

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= \cos(\pi + (-x)) = \cos \pi \cos(-x) - \sin \pi \sin(-x) = -\cos(-x) = -\cos x, \\ \sin(\pi - x) &= \sin(\pi + (-x)) = \sin \pi \cos x + \sin(-x) \cos \pi = -\sin(-x) = \sin x, \end{aligned}$$

weil $\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$, und \cos gerade und \sin ungerade ist.

Damit ist

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

und damit (da $\sin(\frac{\pi}{3}) \neq 0$ weil $0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$), $1 = 2 \cos(\frac{\pi}{3})$; also ist $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Aus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ folgt dann $\sin(\frac{\pi}{3}) = \pm \sqrt{1 - 1/4}$; denn mit $0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ ist $\sin(\frac{\pi}{3})$ positiv, also $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Damit ist $\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$.

Weiter hat man,

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad (2)$$

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad (3)$$

Aus (3) folgt, daß $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \sin^2(\frac{\pi}{4})$, und damit (weil $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$) daß $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$. Aus (2) folgt dann, daß $\sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, und damit hat man $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{4})$. Dann ist

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = 1.$$

Man bekommt weiter, daß

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right), \\ 1 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right), \\ \frac{1}{2} = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(Weil $0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, ist $\cos(\frac{\pi}{6}) > 0, \sin(\frac{\pi}{6}) > 0$).

Endlich hat man,

$$\begin{aligned}\sin(\frac{\pi}{5}) &= \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) = \sin(\frac{4\pi}{5}) = \sin(\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}) = 2 \sin(\frac{2\pi}{5}) \cos(\frac{2\pi}{5}) \\ &= 2 \sin(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}) \cos(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}) = 2[2 \sin(\frac{\pi}{5}) \cos(\frac{\pi}{5})][2 \cos^2(\frac{\pi}{5}) - 1].\end{aligned}$$

Da $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ ist, gilt $\sin(\frac{\pi}{5}) \neq 0$, und es folgt, daß

$$u^3 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8} = 0, \quad u = \cos(\frac{\pi}{5}).$$

Man sieht, daß $u = -\frac{1}{2}$ eine Lösung ist; man faktorisiert dann $p(u) = u^3 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}$ und bekommt

$$(x + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}) = 0, \quad u = \cos(\frac{\pi}{5}).$$

Also ist $u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = (1 + \sqrt{5})/4, u_3 = (1 - \sqrt{5})/4$. Wegen $u = \cos(\frac{\pi}{5}) > 0$, ist also $\cos(\frac{\pi}{5}) = u_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Aus $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ folgt dann $\sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Damit ist dann

$$\tan(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{5})}{\cos(\frac{\pi}{5})} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{4}}}{1+\sqrt{5}}.$$

b) IV.3.14c besagt, daß

$$\tan(\xi + \eta) = \frac{\tan \xi + \tan \eta}{1 - \tan \xi \cdot \tan \eta}.$$

Mit $x = \tan \xi, y = \tan \eta$ folgt

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) &= \arctan\left(\frac{\tan \xi + \tan \eta}{1 - \tan \xi \cdot \tan \eta}\right) \\ &= \arctan(\tan(\xi + \eta)) = \xi + \eta = \arctan(x) + \arctan(y).\end{aligned}$$

Aus (1) folgt, mit $x = y = \frac{1}{5}$,

$$2 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{1/5 + 1/5}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right),$$

und mit $x = y = \frac{5}{12}$,

$$2 \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \arctan\left(\frac{5/12 + 5/12}{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12}}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right),$$

und damit

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = 2 \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right).$$

Mit $x = 1, y = \frac{1}{139}$ folgt

$$\arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{139}\right) = \arctan\left(\frac{1 + 1/139}{1 - 1/139}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right).$$

Also ist

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right) - \arctan\left(\frac{1}{139}\right) = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{139}\right).$$

Es folgt, daß

$$\pi = 16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right). \quad (4)$$

Die Reihe für \arctan ist

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \dots$$

Wir rechnen jetzt die ersten Glieder im Falle $x = \frac{1}{5}$ und $x = \frac{1}{239}$ aus (bei $\frac{1}{5}$ multiplizieren wir gleich mit 16, und bei $\frac{1}{239}$ mit 4, siehe (4)):

$$\begin{aligned} 5 : \quad n=1(+) : \frac{16}{5} &= 3,2 \\ n=3(-) : \frac{16}{3 \cdot 5^3} &= \frac{2^7}{3 \cdot 10^3} = \frac{128}{3} \cdot 10^{-3} = 0,042666667 \\ n=5(+) : \frac{16}{5 \cdot 5^5} &= \frac{2^{10}}{10^6} = 0,0010240000 \\ n=7(-) : \frac{16}{7 \cdot 5^7} &= \frac{2^{11}}{7 \cdot 10^7} = \frac{2048}{7 \cdot 10^7} = 0,0000292571 \\ n=9(+) : \frac{16}{9 \cdot 5^9} &= \frac{2^{13}}{9 \cdot 10^9} = \frac{8192}{9 \cdot 10^9} = 0,0000009102 \\ n=11(-) : \frac{16}{11 \cdot 5^{11}} &= \frac{2^{15}}{11 \cdot 10^{11}} = \frac{32768}{11 \cdot 10^{11}} = 0,0000000298 \\ * \quad n=13 : \frac{16}{13 \cdot 5^{13}} &= \frac{2^{17}}{13 \cdot 10^{13}} = \frac{131072}{13 \cdot 10^{13}} = 0,0000000010 \\ 239 : \quad n=1(-) : \frac{4}{239} &= 0,0167364017 \\ n=3(+) : \frac{4}{3 \cdot 239^3} &= \frac{4}{40955757} = 0,0000000977 \\ * \quad n=5 : \frac{4}{5 \cdot 239^5} &= \frac{4}{389905632600} = 0,000000000001 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 3,2000000000 & & 0,0426666667 \\ +0,0010240000 & & +0,0000292571 \\ +0,0000009102 & & +0,0000000298 \\ +0,0000000977 & & +0,0167364017 \\ ***** & & ***** \\ 3,2010250079 & - & 0,0594323553 = 3,14159265 \ 36 \end{array}$$

Bei einer alternierenden Reihe ist der Fehler bei Näherung durch endlich viele Terme kleiner als der Absolutbetrag vom ersten weggelassenen Term; der oben begangene Fehler ist also kleiner als die Summe von die zwei Termen die mit * markiert sind - also, $0,0000000010 + 0,000000000001 = 0,000000001001$, also stimmt das Resultat auf 8 Stellen. (Man bekommt am Taschenrechner $\pi = 3,14159265 \ 359\dots$ - stimmt also in Wirklichkeit auch auf mehrere Stellen.)

Aufgabe 2: (4 Punkte) Beweisen Sie die Formel von C. L. Dodgson, alias Lewis Carroll (Autor von "Alice im Wunderland"):

$$\arctan \frac{1}{p} = \arctan \frac{1}{p+m} + \arctan \frac{1}{p+n} \text{ wobei } p, m, n \in \mathbb{N} \text{ und } p^2 + 1 = mn.$$

Lösungsvorschlag: Sei $x = \frac{1}{p+m}, y = \frac{1}{p+n}$ ($x, y \in]0, 1[$). Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{1-xy} &= \frac{\frac{1}{p+m} + \frac{1}{p+n}}{1 - \frac{1}{p+m} \frac{1}{p+n}} = \frac{(p+n) + (p+m)}{(p+n)(p+m) - 1} = \frac{2p+n+m}{p^2 + np + mp + mn - 1} \\ &= \frac{2p+n+m}{2p^2 + np + mp} \quad (\text{weil } p^2 + 1 = nm \Rightarrow nm - 1 = p^2) \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Aus 1 b) folgt dann

$$\arctan\left(\frac{1}{p}\right) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{1}{p+m}\right) + \arctan\left(\frac{1}{p+n}\right).$$

Aufgabe 3: (4 Punkte) Beweisen Sie die folgende Darstellung der Areafunktionen:

$$\operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, \infty[,$$

$$\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in]-1, 1[,$$

$$\operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad x \in]1, \infty[.$$

Lösungsvorschlag: Sei $y = \operatorname{Arsinh}(x)$, also $x = \sinh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ oder mit $u = e^y (> 0)$, $u^2 - 2xu - 1 = 0$. Also ist $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$ (das Minuszeichen entfällt, da $u > 0$ ist), und $\log u = y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Sei $y = \operatorname{Arcosh}(x)$, also $x = \cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ oder mit $u = e^y (> 0)$, $u^2 - 2xu + 1 = 0$. Also ist $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$ (das Minuszeichen entfällt wie oben), und $\log u = y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Sei $y = \operatorname{Artanh}(x)$, also

$$x = \tanh(y) = \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{(e^y)^2 - 1}{(e^y)^2 + 1},$$

oder mit $u = e^y (> 0)$, $u^2(1-x) = 1+x$. Also ist $u^2 = \frac{1+x}{1-x}$, und $y = \log u = \frac{1}{2} \log u^2 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Sei $y = \operatorname{Arcoth}(x)$, also

$$x = \coth(y) = \frac{\cosh(y)}{\sinh(y)} = \frac{(e^y)^2 + 1}{(e^y)^2 - 1} = \frac{u^2 + 1}{u^2 - 1}, \quad u = e^y (> 0).$$

Also ist $u^2(x-1) = x+1$ und $y = \log u = \frac{1}{2} \log u^2 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Eine *Hamilton-Funktion* ist eine C^1 -Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$ offene Menge). Das zugehörige (ebene) *hamiltonsche System* besteht aus den (gekoppelten) Differenzialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

Diese beschreiben die Bewegung des Punktes (x, y) in der Ebene als Funktion der Zeit.

- Gegeben eine Lösung $(x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ zu (5). Zeigen Sie, daß die Hamilton-Funktion H längs dieser Lösung konstant ist.
- Sei $H(x, y) = y^2/2 - \cos x$. Leiten Sie das zugehörige *hamiltonsche System* her.
- Einen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ nennt man eine *Ruhelage* (warum?). Zeigen Sie, daß $(x, y) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$, für die oben definierte Hamilton-Funktion alle Ruhelagen sind.
- Aus a) folgt, daß jede Trajektorie $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ einer Lösung $(x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge einer geeigneten Niveaumenge

$$N_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = c\} \quad (6)$$

sein muß. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß $\{(x, \pm \alpha \cos(x/2)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ die Niveaumenge N_1 ist.

Zusatzaufgabe, ohne Punkte: Skizzieren Sie die Niveaumengen für $c = -1, 0, 1$ und 2 .

Lösungsvorschlag:

a) Sei $g(t) = H(x(t), y(t))$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist, mit der Kettenregel, und Verwendung von (5) (weil (x, y) eine Lösung ist; $\dot{x} \equiv x'$)

$$g'(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = -\dot{y}(t)x'(t) + \dot{x}(t)y'(t) = 0,$$

also ist g eine Konstante; d.h., H ist längs die Lösung konstant.

b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(y^2/2 - \cos(x)) = \sin(x), \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y^2/2 - \cos(x)) = y, \end{aligned}$$

und damit ist das zugehörige *hamiltonsche System*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) \end{cases} \quad (7)$$

Dieses entspricht einem *Mathematischen Pendel*, für das der 2. Newtonsche Satz gilt: $\ddot{x} = -\sin(x)$. [Siehe z.B. B. Aulbach: "Gewöhnliche Differenzialgleichungen".]

c) (Wenn $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, dann ist die konstante Abbildung $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0), t \in \mathbb{R}$, eine Lösung des hamiltonschen Systems - deswegen "Ruhelage".) Die Ruhelagen sind genau die Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ wo (siehe (7))

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ -\sin(x_0) = 0, \end{cases}$$

also genau $(x, y) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.

d) Man hat $N_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} H(x, y) = 1 &\Leftrightarrow y^2/2 = \cos(x) + 1 \\ &\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{2 \cos(x) + 2} = \pm \sqrt{2 \cos(2 \cdot \frac{x}{2}) + 2} \\ &= \pm \sqrt{2(2 \cos^2(\frac{x}{2}) - 1) + 2} = \pm \sqrt{4 \cos^2(\frac{x}{2})} = \pm 2 \cos(\frac{x}{2}). \end{aligned}$$

Also, mit $\alpha = 2$ ist $\{(x, \pm \alpha \cos(x/2)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ die Niveaumenge N_1 .

Für die Skizze die Niveaumengen für $c = -1, 0, 1$ und 2 , siehe Link Homepage ($N_{-1} = \{(0, 0)\}$ sieht man nicht; die Niveaumengen sind, von innen nach aussen, N_0, N_1, N_2).

Abgabe bis Montag 18.04.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.

Unter <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen> sind die Blätter im Internet abrufbar.

Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335