Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein 20.06.2005

Übungsblatt 10 zu MPIIA

Aufgabe 37: (4 Punkte) Berechnen Sie näherungsweise $1,05^{1.02}$ mit einem Fehler $< 10^{-4}$.
Hinweis: Wende auf die Funktion $f(x,y) := x^y$ den Satz von Taylor mit $x_0 = y_0 = 1$ und $n = 2$ an.

Lösungsvorschlag: Sei $f(x,y) := x^y$. Dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= x^y(\ln x)^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^y \ln x) = (1 + y\ln x)x^{y-1}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = (1 + y\ln x)x^{y-1} \ (= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)); \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(y(y-1)x^{y-2}) = (2y - 1 + (y^2 - y)\ln x)x^{y-2}; \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}((1 + y\ln x)x^{y-1}) \\
&= (2y - 1 + (y^2 - y)\ln x)x^{y-2} \ (= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y)); \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}((1 + y\ln x)x^{y-1}) = \ln x(2 + y\ln x)x^{y-1}; \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^y(\ln x)^2) = \ln x(2 + y\ln x)x^{y-1}; \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(y(y-1)x^{y-2}) = y(y-1)(y-2)x^{y-3}; \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^y(\ln x)^2) = (\ln x)^3 x^y; \\
\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = 1; \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0.
\end{aligned}$$

Damit hat man (VII.4.1 Satz (Taylor)) (für ein (z_1, z_2) mit $z_1 \in [1, x], z_2 \in [1, y]$)

$$\begin{aligned}
x^y = f(x,y) &= f(1,1) + [\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)](x-1) + [\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)](y-1) \\
&+ \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)](x-1)^2 + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)](y-1)^2 \\
&+ [\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1)](x-1)(y-1) \\
&+ \frac{1}{6}[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(z_1,z_2)](x-1)^3 + \frac{1}{2}[\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(z_1,z_2)](x-1)^2(y-1) \\
&+ \frac{1}{2}[\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(z_1,z_2)](x-1)(y-1)^2 + \frac{1}{6}[\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(z_1,z_2)](y-1)^3 \\
&= x + (x-1)(y-1) + g(x,y,z_1,z_2)\ , \\
g(x,y,z_1,z_2) &= \frac{1}{6} z_2(z_2-1)(z_2-2) z_1^{z_2-3}(x-1)^3 \\
&+ \frac{1}{2}(2z_1 - 1 + (z_2^2 - z_2)\ln z_1) z_1^{z_2-2}(x-1)^2(y-1) \\
&+ \frac{1}{2}\ln z_1(2 + z_2 \ln z_1) z_1^{z_2-1}(x-1)(y-1)^2 \\
&+ \frac{1}{6}(\ln z_1)^3 z_1^{z_2}(y-1)^3.
\end{aligned}$$

Also bekommt man, mit $z_1 \in [1, 1.05], z_2 \in [1, 1.02]$,

$$\begin{aligned}
1{,}05^{1{,}02} &= 1{,}05 + (1{,}05-1)(1{,}02-1) + g(1.05, 1.02, z_1, z_2) \\
&= 1{,}051 + g(1.05, 1.02, z_1, z_2).
\end{aligned}$$

Mit verwendung von $\ln(1+t) \leq t$, $t \geq 0$, und $z_1 \in [1, 1.05], z_2 \in [1, 1.02]$, bekommt man dann

$$\begin{aligned}
\left|g(1.05, 1.02, z_1, z_2)\right| &\leq \frac{1}{6} \cdot 1{,}02 \cdot 0{,}02 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}05^3 \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (1{,}10 + (1{,}02^2 + 1{,}02)0{,}05) \cdot 1 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}02 \\
&+ \frac{1}{2} \cdot 0{,}05(2 + 1{,}02 \cdot 0{,}05) \cdot 2^2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}02^2 \\
&+ \frac{1}{6}(0{,}05)^3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}02^3 \\
&\leq \frac{1}{6} \cdot 5^3 \cdot 1{,}02 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} \\
&+ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (5^2 \cdot 2) \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} \\
&+ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} \cdot 2^2 \\
&+ \frac{1}{6} \cdot (5^3 \cdot 2^3) \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} \cdot 4 \\
&\leq \frac{2}{3} \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-6} + \frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \\
&< 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Also ist $1{,}05^{1{,}02} = 1{,}051 \pm 10^{-4}$ (man kriegt, mit der Taschenrechner, tatsächlich 1.0510250935.....)

Aufgabe 38: (4 Punkte) Sei $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := (3x^2 - y^2)\exp(-x^2 - y^2).$$

Besitzt f ein globales Minimum bzw. ein globales Maximum? Wenn ja, bestimmen Sie die Stelle(n), an denen das Minimum bzw. Maximum angenommen wird.

Lösungsvorschlag: Die Funktion f ist stetig (die Funktionen $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$ sind stetig, und f ist damit Zusammensetzung stetiger Funktionen). Ausserdem ist die Menge $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le 1\}$ kompakt, weil abgeschlossen und beschränkt (Heine-Borel); beschränkt, weil $|(x,y)| \le 1$ für alle $(x,y) \in A$, und abgeschlossen, weil $A = g^{-1}(\,]-\infty,1])$ mit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2+y^2$ stetig. Damit (VI.3.4 Satz) besitzt f ein globales Minimum bzw. ein globales Maximum.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(3-(3x^2-y^2))\exp(-x^2-y^2);$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y(1+(3x^2-y^2))\exp(-x^2-y^2);$$
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x(3-(3x^2-y^2)) = 0 \\ 2y(1+(3x^2-y^2)) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (x=0 \wedge y=0) \vee (x=0 \wedge 2y(1-y^2)=0) \vee \\ (y=0 \wedge 2x(3-3x^2)=0) \vee \\ (3x^2-y^2=3 \wedge 3x^2-y^2=-1) \end{cases}$$
$$\Rightarrow (x,y) \in \{(0,0),(0,\pm 1),(\pm 1,0)\}$$

Nur $(x,y) = (0,0)$ gehört zu $(\overline{K_1(0)})^\circ$ ($3x^2-y^2 = 3 \wedge 3x^2-y^2 = -1$ hat keine Lösung). Also ist $(0,0)$ einzige kritische Punkt im $(\overline{K_1(0)})^\circ$; $f(0,0) = 0$.

Am $\partial(\overline{K_1(0)})$: $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow f(x,y) = [3x^2-(1-x^2)]\exp(-1) = \frac{1}{e}(4x^2-1) \equiv g(x), x \in [-1,1]$. Offentsichtlich wird das Minimum ($= -\frac{1}{e}$) von g für $x = 0$ angenommen, und das Maximum ($= \frac{3}{e}$) für $x = \pm 1$ angenommen. Durch Vergleich mit $f(0,0) = 0$ bekommt man, daß das Minimum ($= -\frac{1}{e}$) von f in $(x,y) = (0,0)$ und $(x,y) = (0,-1)$ angenommen wird. Das Maximum ($= \frac{3}{e}$) wird in $(x,y) = (1,0)$ und in $(x,y) = (-1,0)$ angenommen.

Aufgabe 39: (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := -yx^2 + (1+y)^2.$$

a) Bestimmen Sie sämtliche kritischen Punkte von f (d.h. Punkte, an denen der Gradient verschwindet) und bestimmen Sie an diesen Stellen die Terme der Taylorreihe der Ordnung ≤ 2.

b) Besitzt f globale Extrema? Wenn ja, bestimmen Sie diese. Besitzt f lokale Extrema? Wenn ja, bestimmen Sie diese.

c) Sei g die Einschränkung von f auf das Quadrat $[-2,2]^2$. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von g.

Lösungsvorschlag: a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2+2(1+y) = -x^2+2+2y;$$
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ -x^2+2+2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \wedge 1+y = 0 \\ \vee \\ y = 0 \wedge -x^2+2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (x,y) \in \{(0,-1),(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)\}.$$

Man prüft nach, daß tatsächlich $\nabla f(x,y) = (0,0)$ für $(x,y) = (0,-1)$, $(x,y) = (-\sqrt{2},0)$, und $(x,y) = (\sqrt{2},0)$. Diese sind also sämtlich kritischen Punkte von f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2x;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2x \ \left(= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2.$$

$\underline{(x,y) = (0,-1):}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,-1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,-1) = 0; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1) = 2.$$

Taylorpolynom 2. Grad um den Entwicklungspunkt $(0,-1)$:

$$\begin{aligned}(T_2 f)(x,y) &= f(0,-1) + \big[\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)\big](x-0) + \big[\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)\big](y-(-1)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1)\big](x-0)^2 + \frac{1}{2}\big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1)\big](y-(-1))^2 \\ &\quad + \big[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,-1)\big](x-0)(y-(-1)) \\ &= x^2 + y^2 + 2y + 1.\end{aligned}$$

$\underline{(x,y) = (-\sqrt{2},0):}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2},0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\sqrt{2},0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\sqrt{2},0) = 2\sqrt{2}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\sqrt{2},0) = 2.$$

Taylorpolynom 2. Grad um den Entwicklungspunkt $(-\sqrt{2},0)$:

$$\begin{aligned}(T_2 f)(x,y) &= f(-\sqrt{2},0) + \big[\frac{\partial f}{\partial x}(-\sqrt{2},0)\big](x-(-\sqrt{2})) + \big[\frac{\partial f}{\partial y}(-\sqrt{2},0)\big](y-0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2},0)\big](x-(-\sqrt{2}))^2 + \frac{1}{2}\big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\sqrt{2},0)\big](y-0)^2 \\ &\quad + \big[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\sqrt{2},0)\big](x-(-\sqrt{2}))(y-0) \\ &= y^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y + 1.\end{aligned}$$

$\underline{(x,y) = (\sqrt{2},0):}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2},0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sqrt{2},0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\sqrt{2},0) = -2\sqrt{2}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{2},0) = 2.$$

Taylorpolynom 2. Grad um den Entwicklungspunkt $(\sqrt{2},0)$:

$$\begin{aligned}(T_2 f)(x,y) &= f(\sqrt{2},0) + \big[\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2},0)\big](x-\sqrt{2}) + \big[\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{2},0)\big](y-0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2},0)\big](x-\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}\big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{2},0)\big](y-0)^2 \\ &\quad + \big[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sqrt{2},0)\big](x-\sqrt{2})(y-0) \\ &= y^2 - 2\sqrt{2}xy + 4y + 1.\end{aligned}$$

b) Man sieht, daß

$$f(0,y) = (1+y)^2 \to \infty \ , \qquad y \to \infty$$

und

$$f(x,1) = -x^2 + 4 \to -\infty \ , \qquad x \to \infty,$$

also ist f unbeschränkt und hat weder globale Maximum noch globale Minimum.

Kandidaten für *lokale* Extrema sind die in a) bestimmte kritische Punkte.

Hessematrix für $(x, y) = (0, -1)$:

$$(D^2 f)(0,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,-1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Weil beide Eigenwerte positiv sind, ist $(D^2 f)(0, -1)$ positiv definit, also ist $(x, y) = (0, -1)$ ein lokales Minimum.
$\Big[$ Man sieht auch dieses direkt, weil $f(0, -1) = 0$, und $(1 + y)^2 \geq 0, -yx^2 \geq 0$ (in der Nähe von $(x, y) = (0, -1)$), also ist $f(x, y) \geq f(0, -1)$ in der Nähe von $(x, y) = (0, -1)$. $\Big]$

Hessematrix für $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$:

$$(D^2 f)(\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2},0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\sqrt{2},0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\sqrt{2},0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{2},0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix};$$

$$\det\big[(D^2 f)(\sqrt{2},0) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}\big] = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 - 9;$$

$$\Rightarrow \Big(\det\big[(D^2 f)(\sqrt{2},0) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}\big] = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 4\} \Big).$$

Weil eine Eigenwert negativ, und der andere positiv ist, ist $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$ ein Sattelpunkt, also insbesonders kein lokales Extremum.

Hessematrix für $(x, y) = (-\sqrt{2}, 0)$:

$$(D^2 f)(-\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2},0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\sqrt{2},0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\sqrt{2},0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\sqrt{2},0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Weil

$$\det\big[(D^2 f)(\sqrt{2},0) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}\big] = \det\big[(D^2 f)(-\sqrt{2},0) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}\big]$$

ist auch $(x, y) = (-\sqrt{2}, 0)$ ein Sattelpunkt und kein lokales Extremum.

c) Die Menge $[-2, 2]^2$ ist beschränkt ($|(x, y)| \leq 2\sqrt{2}$ für alle $(x, y) \in [-2, 2]^2$), und abgeschlossen:

$$\begin{aligned}[-2,2]^2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [-2,2]\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \in [-2,2]\} \\ &=: A \cap B =: h_1^{-1}([-2,2]) \cap h_2^{-1}([-2,2])\end{aligned}$$

mit $h_1(x, y) = x, h_2(x, y) = y$ stetige Funktionen, und $[-2, 2]$ abgeschlossen; also sind A und B abgeschlossen, weil Urbilder von abgeschlossene Mengen unter stetige Funktionen, und damit ist $[-2, 2]^2$, als Schnittmenge abgeschlossener Mengen, auch abgeschlossen.

Damit ist $[-2, 2]^2$ kompakt (Heine-Borel) und weil g stetig ist (Analysis I), hat g ein Maximum und ein Minimum auf $[-2, 2]^2$. Wie in b) sind lokale Extrema im Inneren unter die kritische Punkte zu suchen. Wie in b) ist $(0, -1) \in [-2, 2]^2$ eine lokale Minimum ($g(0, -1) = 0$). Andere lokale Extrema gibt es im Inneren von $[-2, 2]^2$ nicht.

Betrachte der Teil von $\partial([-2, 2]^2)$ wo $x = \pm 2$ ($y \in [-2, 2]$). Dann ist

$$g(\pm 2, y) = -y \cdot 4 + (1+y)^2 = (y-1)^2 =: k_1(y) \ , \quad y \in [-2,2].$$

Die Funktion k_1 hat offentsichtlich Minimum (gleich 0) für $y = 1$, und Maximum (gleich 9) für $y = -2$. Man bemerkt, daß wenn $x \in]-2, 2[$, dann ist $x^2 < 4$ und damit ist $g(x, y) > g(\pm 2, y) > g(\pm 2, 1)$ für $y > 0$, und damit sind $(x, y) = (-2, 1)$, $(x, y) = (2, 1)$ lokale Minima; $g(\pm 2, 1) = 0$. Weiter hat man, für $0 > y > -2$,

$$9 = g(\pm 2, -2) = k_1(-2) \geq k_1(y) = -y \cdot 4 + (1+y)^2 \geq -yx^2 + (1+y)^2 = g(x,y),$$

und damit sind $(x, y) = (2, -2)$ und $(x, y) = (-2, -2)$ lokale Maxima.

Betrachte jetzt der Teil von $\partial([-2,2]^2)$ wo $y = 2$ ($x \in [-2,2]$).

$$g(x,2) = -2x^2 + (1+2)^2 = -2x^2 + 9 \equiv k_2(x)\ ,\ x \in [-2,2].$$

Die Funktion k_2 hat offentsichtlich Maximum ($= 9$) für $x = 0$ und Minimum ($= 1$) für $x = \pm 2$. Man hat (für $0 < y < 2$), $g(x,y) = -yx^2 + (1+y)^2 \leq 0 + (1+2)^2 = 9$, also ist $(x,y) = (0,2)$ ein lokales Maximum. Weiter ist

$$g(\pm 2, y) + (y-1)^2 = k_1(y) \leq k_1(2) = g(\pm 2, 2) = k_2(\pm 2) \leq k_2(x)\ , y \in [1,2]\ , x \in [-2,2].$$

D.h., entlang $x = \pm 2$ wird g kleiner, entlang $y = 2$ wird g grösser. Also ist $(x,y) = (\pm 2, 2)$ weder lokales Maximum noch lokales Minimum (Ansonsten hätte man die auch bei der Untersuchung von k_1 schon gefunden).

Endlich betrachte der Teil von $\partial([-2,2]^2)$ wo $y = -2$ ($x \in [-2,2]$).

$$g(x,-2) = 2x^2 + (1+(-2))^2 = 2x^2 + 1 \equiv k_3(x)\ , x \in [-2,2].$$

Die Funktion k_3 hat offentsichtlich Maximum ($= 9$) für $x = \pm 2$, und Minimum ($= 1$) für $x = 0$. Die zwei Punkte $(x,y) = (\pm 2, -2)$ haben wir schon bei der Untersuchung von k_1 gefunden - sie sind lokale Maxima.

Für $(x,y) = (0,-2)$ sieht man, daß $g(0,-2) = 1 \geq g(0,y)$ für $y \in [-2,-1]$. Also wird g entlang $x = 0$ grösser, aber kleiner entlang $y = -2$ (weil k_3 für $x = 0$ Minimum hat). Also ist $(x,y) = (0,-2)$ weder lokales Minimum noch lokales Maximum.

Insgesamt bekommt man, daß das globale Maximum von g gleich 9 ist, und daß es in die drei Punkten $(x,y) = (2,-2), (-2,-2)$ und $(0,2)$ angenommen wird. Das globale Minimum von g ist gleich 0 und das wird in $(x,y) = (0,-1), (-2,1)$ und $(2,1)$ angenommen.

Aufgabe 40: (4 Punkte) Bestimmen Sie die kritischen Stellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3y^2 - 3x.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix, ob es sich um lokale Minima, Maxima, oder Sattelpunkte handelt.

Lösungsvorschlag:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3 = 3(x+y)^2 - 3;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 6y = 3(x+y)^2 - 6y.$$

Kritische Punkte:

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 - 3 = 0 \\ 3(x+y)^2 - 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 3 \\ (x+y)^2 = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \vee (x,y) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}).$$

$\Big[$ Man prüft nach, daß tatsächlich $\nabla f(x,y) = (0,0)$ für $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(x,y) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. $\Big]$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 6y = 6(x+y); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x + 6y = 6(x+y);$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x + 6y = 6(x+y) \quad (= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y));$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x + 6y - 6 = 6(x+y-1).$$

Hessematrix $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$:

$$(D^2f)(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix};$$

$$\det\left[(D^2f)(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})-\lambda\cdot id_{\mathbb{R}^2}\right]=\det\begin{pmatrix}6-\lambda & 6\\ 6 & -\lambda\end{pmatrix}=(\lambda-3)^2-45;$$

$$\Rightarrow\Big(\ \det\left[(D^2f)(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})-\lambda\cdot id_{\mathbb{R}^2}\right]=0\Leftrightarrow\lambda\in\{3(1-\sqrt{5}),3(1+\sqrt{5})\}\ \Big).$$

Weil es eine positive, und eine negative Eigenwert für $(D^2f)(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ gibt, ist $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ein Sattelpunkt.

Hessematrix $(x,y)=(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$:

$$(D^2f)(-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2})=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -6\\ -6 & -12\end{pmatrix};$$

$$\det\left[(D^2f)(-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2})-\lambda\cdot id_{\mathbb{R}^2}\right]=\det\begin{pmatrix}-6-\lambda & -6\\ -6 & -12-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda+9)^2-45;$$

$$\Rightarrow\Big(\ \det\left[(D^2f)(-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2})-\lambda\cdot id_{\mathbb{R}^2}\right]=0\Leftrightarrow\lambda\in\{-3(\sqrt{5}+3),3(\sqrt{5}-3)\}\ \Big).$$

Weil beide Eigenwerte von $(D^2f)(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ negative sind, ist $(x,y)=(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ ein lokales Maximum.

Abgabe bis Montag 27.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.
Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` **sind die Blätter im Internet abrufbar.**
Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335