

Übungsblatt 10 zu MPIIA

Aufgabe 37: (4 Punkte) Berechnen Sie näherungsweise $1,05^{1.02}$ mit einem Fehler $< 10^{-4}$. Hinweis: Wende auf die Funktion $f(x, y) := x^y$ den Satz von Taylor mit $x_0 = y_0 = 1$ und $n = 2$ an.

Lösungsvorschlag: Sei $f(x, y) := x^y$. Dann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= yx^{y-1}; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^y \ln x; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= y(y-1)x^{y-2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= x^y (\ln x)^2; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^y \ln x) = (1 + y \ln x)x^{y-1}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = (1 + y \ln x)x^{y-1} \quad (= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)); \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(y(y-1)x^{y-2}) = (2y-1 + (y^2-y) \ln x)x^{y-2}; \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}((1 + y \ln x)x^{y-1}) \\ &= (2y-1 + (y^2-y) \ln x)x^{y-2} \quad (= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y)); \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}((1 + y \ln x)x^{y-1}) \\ &= \ln x (2 + y \ln x)x^{y-1}; \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^y (\ln x)^2) = \ln x (2 + y \ln x)x^{y-1}; \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(y(y-1)x^{y-2}) = y(y-1)(y-2)x^{y-3}; \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^y (\ln x)^2) = (\ln x)^3 x^y; \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = 1; & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 0.\end{aligned}$$

Damit hat man (VII.4.1 Satz (Taylor)) (für ein (z_1, z_2) mit $z_1 \in [1, x], z_2 \in [1, y]$)

$$\begin{aligned}
 x^y = f(x, y) &= f(1, 1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)\right](x - 1) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)\right](y - 1) \\
 &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1)\right](x - 1)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1)\right](y - 1)^2 \\
 &+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1)\right](x - 1)(y - 1) \\
 &+ \frac{1}{6}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(z_1, z_2)\right](x - 1)^3 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(z_1, z_2)\right](x - 1)^2(y - 1) \\
 &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(z_1, z_2)\right](x - 1)(y - 1)^2 + \frac{1}{6}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(z_1, z_2)\right](y - 1)^3 \\
 &= x + (x - 1)(y - 1) + g(x, y, z_1, z_2), \\
 g(x, y, z_1, z_2) &= \frac{1}{6}z_2(z_2 - 1)(z_2 - 2)z_1^{z_2-3}(x - 1)^3 \\
 &+ \frac{1}{2}(2z_1 - 1 + (z_2^2 - z_2) \ln z_1)z_1^{z_2-2}(x - 1)^2(y - 1) \\
 &+ \frac{1}{2}\ln z_1(2 + z_2 \ln z_1)z_1^{z_2-1}(x - 1)(y - 1)^2 \\
 &+ \frac{1}{6}(\ln z_1)^3 z_1^{z_2}(y - 1)^3.
 \end{aligned}$$

Also bekommt man, mit $z_1 \in [1, 1.05], z_2 \in [1, 1.02]$,

$$\begin{aligned}
 1,05^{1,02} &= 1,05 + (1,05 - 1)(1,02 - 1) + g(1,05, 1,02, z_1, z_2) \\
 &= 1,051 + g(1,05, 1,02, z_1, z_2).
 \end{aligned}$$

Mit verwendung von $\ln(1 + t) \leq t, t \geq 0$, und $z_1 \in [1, 1.05], z_2 \in [1, 1.02]$, bekommt man dann

$$\begin{aligned}
 |g(1,05, 1,02, z_1, z_2)| &\leq \frac{1}{6} \cdot 1,02 \cdot 0,02 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,05^3 \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot (1,10 + (1,02^2 + 1,02)0,05) \cdot 1 \cdot 0,05^2 \cdot 0,02 \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot 0,05(2 + 1,02 \cdot 0,05) \cdot 2^2 \cdot 0,05 \cdot 0,02^2 \\
 &+ \frac{1}{6}(0,05)^3 \cdot 2^2 \cdot 0,02^3 \\
 &\leq \frac{1}{6} \cdot 5^3 \cdot 1,02 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (5^2 \cdot 2) \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} \cdot 2^2 \\
 &+ \frac{1}{6} \cdot (5^3 \cdot 2^3) \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} \cdot 4 \\
 &\leq \frac{2}{3} \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-6} + \frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \\
 &< 10^{-4}.
 \end{aligned}$$

Also ist $1,05^{1,02} = 1,051 \pm 10^{-4}$ (man kriegt, mit der Taschenrechner, tatsächlich 1.0510250935.....)

Aufgabe 38: (4 Punkte) Sei $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := (3x^2 - y^2) \exp(-x^2 - y^2).$$

Besitzt f ein globales Minimum bzw. ein globales Maximum? Wenn ja, bestimmen Sie die Stelle(n), an denen das Minimum bzw. Maximum angenommen wird.

Lösungsvorschlag: Die Funktion f ist stetig (die Funktionen $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ sind stetig, und f ist damit Zusammensetzung stetiger Funktionen). Ausserdem ist die Menge $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ kompakt, weil abgeschlossen und beschränkt (Heine-Borel); beschränkt, weil $|(x, y)| \leq 1$ für alle $(x, y) \in A$, und abgeschlossen, weil $A = g^{-1}(]-\infty, 1])$ mit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 + y^2$ stetig. Damit (VI.3.4 Satz) besitzt f ein globales Minimum bzw. ein globales Maximum.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x(3 - (3x^2 - y^2)) \exp(-x^2 - y^2); \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2y(1 + (3x^2 - y^2)) \exp(-x^2 - y^2); \\ \nabla f(x, y) = (0, 0) &\Rightarrow \begin{cases} 2x(3 - (3x^2 - y^2)) = 0 \\ 2y(1 + (3x^2 - y^2)) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x = 0 \wedge y = 0) \vee (x = 0 \wedge 2y(1 - y^2) = 0) \vee \\ (y = 0 \wedge 2x(3 - 3x^2) = 0) \vee \\ (3x^2 - y^2 = 3 \wedge 3x^2 - y^2 = -1) \end{cases} \\ &\Rightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}\end{aligned}$$

Nur $(x, y) = (0, 0)$ gehört zu $(\overline{K_1(0)})^\circ$ ($3x^2 - y^2 = 3 \wedge 3x^2 - y^2 = -1$ hat keine Lösung). Also ist $(0, 0)$ einziger kritischer Punkt im $(\overline{K_1(0)})^\circ$; $f(0, 0) = 0$.

Am $\partial(\overline{K_1(0)})$: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow f(x, y) = [3x^2 - (1 - x^2)] \exp(-1) = \frac{1}{e}(4x^2 - 1) \equiv g(x)$, $x \in [-1, 1]$. Offensichtlich wird das Minimum ($= -\frac{1}{e}$) von g für $x = 0$ angenommen, und das Maximum ($= \frac{3}{e}$) für $x = \pm 1$ angenommen. Durch Vergleich mit $f(0, 0) = 0$ bekommt man, daß das Minimum ($= -\frac{1}{e}$) von f in $(x, y) = (0, 0)$ und $(x, y) = (0, -1)$ angenommen wird. Das Maximum ($= \frac{3}{e}$) wird in $(x, y) = (1, 0)$ und in $(x, y) = (-1, 0)$ angenommen.

Aufgabe 39: (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := -yx^2 + (1 + y)^2.$$

- Bestimmen Sie sämtliche kritischen Punkte von f (d.h. Punkte, an denen der Gradient verschwindet) und bestimmen Sie an diesen Stellen die Terme der Taylorreihe der Ordnung ≤ 2 .
- Besitzt f globale Extrema? Wenn ja, bestimmen Sie diese. Besitzt f lokale Extrema? Wenn ja, bestimmen Sie diese.
- Sei g die Einschränkung von f auf das Quadrat $[-2, 2]^2$. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von g .

Lösungsvorschlag: a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 + 2(1 + y) = -x^2 + 2 + 2y; \\ \nabla f(x, y) = (0, 0) &\Rightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ -x^2 + 2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \wedge 1 + y = 0 \\ \vee \\ y = 0 \wedge -x^2 + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow (x, y) \in \{(0, -1), (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)\}.\end{aligned}$$

Man prüft nach, daß tatsächlich $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ für $(x, y) = (0, -1)$, $(x, y) = (-\sqrt{2}, 0)$, und $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$. Diese sind also sämtlich kritischen Punkte von f .

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2x; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -2x \quad (= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2.\end{aligned}$$

$$\underline{(x, y) = (0, -1) :}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, -1) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -1) = 2.$$

Taylorpolynom 2. Grad um den Entwicklungspunkt $(0, -1)$:

$$\begin{aligned} (T_2 f)(x, y) &= f(0, -1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) \right] (x - 0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) \right] (y - (-1)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) \right] (x - 0)^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -1) \right] (y - (-1))^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -1) \right] (x - 0)(y - (-1)) \\ &= x^2 + y^2 + 2y + 1. \end{aligned}$$

$$\underline{(x, y) = (-\sqrt{2}, 0) :}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2}, 0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\sqrt{2}, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\sqrt{2}, 0) = 2\sqrt{2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\sqrt{2}, 0) = 2.$$

Taylorpolynom 2. Grad um den Entwicklungspunkt $(-\sqrt{2}, 0)$:

$$\begin{aligned} (T_2 f)(x, y) &= f(-\sqrt{2}, 0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(-\sqrt{2}, 0) \right] (x - (-\sqrt{2})) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(-\sqrt{2}, 0) \right] (y - 0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2}, 0) \right] (x - (-\sqrt{2}))^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\sqrt{2}, 0) \right] (y - 0)^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\sqrt{2}, 0) \right] (x - (-\sqrt{2}))(y - 0) \\ &= y^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y + 1. \end{aligned}$$

$$\underline{(x, y) = (\sqrt{2}, 0) :}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2}, 0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sqrt{2}, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\sqrt{2}, 0) = -2\sqrt{2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{2}, 0) = 2.$$

Taylorpolynom 2. Grad um den Entwicklungspunkt $(\sqrt{2}, 0)$:

$$\begin{aligned} (T_2 f)(x, y) &= f(\sqrt{2}, 0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2}, 0) \right] (x - \sqrt{2}) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{2}, 0) \right] (y - 0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2}, 0) \right] (x - \sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{2}, 0) \right] (y - 0)^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sqrt{2}, 0) \right] (x - \sqrt{2})(y - 0) \\ &= y^2 - 2\sqrt{2}xy + 4y + 1. \end{aligned}$$

b) Man sieht, daß

$$f(0, y) = (1 + y)^2 \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow \infty$$

und

$$f(x, 1) = -x^2 + 4 \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

also ist f unbeschränkt und hat weder globale Maximum noch globale Minimum.

Kandidaten für *lokale* Extrema sind die in a) bestimmte kritische Punkte.

Hessematrix für $(x, y) = (0, -1)$:

$$(D^2 f)(0, -1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, -1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, -1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Weil beide Eigenwerte positiv sind, ist $(D^2 f)(0, -1)$ positiv definit, also ist $(x, y) = (0, -1)$ ein lokales Minimum.

[Man sieht auch dieses direkt, weil $f(0, -1) = 0$, und $(1+y)^2 \geq 0$, $-yx^2 \geq 0$ (in der Nähe von $(x, y) = (0, -1)$), also ist $f(x, y) \geq f(0, -1)$ in der Nähe von $(x, y) = (0, -1)$.]

Hessematrix für $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$:

$$(D^2 f)(\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2}, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\sqrt{2}, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\sqrt{2}, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{2}, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix};$$

$$\det [(D^2 f)(\sqrt{2}, 0) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}] = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 9;$$

$$\Rightarrow \left(\det [(D^2 f)(\sqrt{2}, 0) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}] = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 4\} \right).$$

Weil ein Eigenwert negativ, und der andere positiv ist, ist $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$ ein Sattelpunkt, also insbesondere kein lokales Extremum.

Hessematrix für $(x, y) = (-\sqrt{2}, 0)$:

$$(D^2 f)(-\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2}, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\sqrt{2}, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\sqrt{2}, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\sqrt{2}, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Weil

$$\det [(D^2 f)(\sqrt{2}, 0) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}] = \det [(D^2 f)(-\sqrt{2}, 0) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}]$$

ist auch $(x, y) = (-\sqrt{2}, 0)$ ein Sattelpunkt und kein lokales Extremum.

c) Die Menge $[-2, 2]^2$ ist beschränkt ($|(x, y)| \leq 2\sqrt{2}$ für alle $(x, y) \in [-2, 2]^2$), und abgeschlossen:

$$\begin{aligned} [-2, 2]^2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2]\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-2, 2]\} \\ &=: A \cap B =: h_1^{-1}([-2, 2]) \cap h_2^{-1}([-2, 2]) \end{aligned}$$

mit $h_1(x, y) = x$, $h_2(x, y) = y$ stetige Funktionen, und $[-2, 2]$ abgeschlossen; also sind A und B abgeschlossen, weil Urbilder von abgeschlossenen Mengen unter stetigen Funktionen, und damit ist $[-2, 2]^2$, als Schnittmenge abgeschlossener Mengen, auch abgeschlossen.

Damit ist $[-2, 2]^2$ kompakt (Heine-Borel) und weil g stetig ist (Analysis I), hat g ein Maximum und ein Minimum auf $[-2, 2]^2$. Wie in b) sind lokale Extrema im Inneren unter die kritischen Punkte zu suchen. Wie in b) ist $(0, -1) \in [-2, 2]^2$ eine lokale Minimum ($g(0, -1) = 0$). Andere lokale Extrema gibt es im Inneren von $[-2, 2]^2$ nicht.

Betrachte der Teil von $\partial([-2, 2]^2)$ wo $x = \pm 2$ ($y \in [-2, 2]$). Dann ist

$$g(\pm 2, y) = -y \cdot 4 + (1 + y)^2 = (y - 1)^2 =: k_1(y), \quad y \in [-2, 2].$$

Die Funktion k_1 hat offensichtlich Minimum (gleich 0) für $y = 1$, und Maximum (gleich 9) für $y = -2$. Man bemerkt, daß wenn $x \in]-2, 2[$, dann ist $x^2 < 4$ und damit ist $g(x, y) > g(\pm 2, y) > g(\pm 2, 1)$ für $y > 0$, und damit sind $(x, y) = (-2, 1)$, $(x, y) = (2, 1)$ lokale Minima; $g(\pm 2, 1) = 0$. Weiter hat man, für $0 > y > -2$,

$$9 = g(\pm 2, -2) = k_1(-2) \geq k_1(y) = -y \cdot 4 + (1 + y)^2 \geq -yx^2 + (1 + y)^2 = g(x, y),$$

und damit sind $(x, y) = (2, -2)$ und $(x, y) = (-2, -2)$ lokale Maxima.

Betrachte jetzt der Teil von $\partial([-2, 2]^2)$ wo $y = 2$ ($x \in [-2, 2]$).

$$g(x, 2) = -2x^2 + (1 + 2)^2 = -2x^2 + 9 \equiv k_2(x), \quad x \in [-2, 2].$$

Die Funktion k_2 hat offensichtlich Maximum (= 9) für $x = 0$ und Minimum (= 1) für $x = \pm 2$. Man hat (für $0 < y < 2$), $g(x, y) = -yx^2 + (1 + y)^2 \leq 0 + (1 + 2)^2 = 9$, also ist $(x, y) = (0, 2)$ ein lokales Maximum. Weiter ist

$$g(\pm 2, y) + (y - 1)^2 = k_1(y) \leq k_1(2) = g(\pm 2, 2) = k_2(\pm 2) \leq k_2(x), \quad y \in [1, 2], \quad x \in [-2, 2].$$

D.h., entlang $x = \pm 2$ wird g kleiner, entlang $y = 2$ wird g grösser. Also ist $(x, y) = (\pm 2, 2)$ weder lokales Maximum noch lokales Minimum (Ansonsten hätte man die auch bei der Untersuchung von k_1 schon gefunden).

Endlich betrachte der Teil von $\partial([-2, 2]^2)$ wo $y = -2$ ($x \in [-2, 2]$).

$$g(x, -2) = 2x^2 + (1 + (-2))^2 = 2x^2 + 1 \equiv k_3(x), \quad x \in [-2, 2].$$

Die Funktion k_3 hat offensichtlich Maximum (= 9) für $x = \pm 2$, und Minimum (= 1) für $x = 0$. Die zwei Punkte $(x, y) = (\pm 2, -2)$ haben wir schon bei der Untersuchung von k_1 gefunden - sie sind lokale Maxima.

Für $(x, y) = (0, -2)$ sieht man, daß $g(0, -2) = 1 \geq g(0, y)$ für $y \in [-2, -1]$. Also wird g entlang $x = 0$ grösser, aber kleiner entlang $y = -2$ (weil k_3 für $x = 0$ Minimum hat). Also ist $(x, y) = (0, -2)$ weder lokales Minimum noch lokales Maximum.

Insgesamt bekommt man, daß das globale Maximum von g gleich 9 ist, und daß es in die drei Punkten $(x, y) = (2, -2)$, $(-2, -2)$ und $(0, 2)$ angenommen wird. Das globale Minimum von g ist gleich 0 und das wird in $(x, y) = (0, -1)$, $(-2, 1)$ und $(2, 1)$ angenommen.

Aufgabe 40: (4 Punkte) Bestimmen Sie die kritischen Stellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3y^2 - 3x.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix, ob es sich um lokale Minima, Maxima, oder Sattelpunkte handelt.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3 = 3(x + y)^2 - 3; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 6y = 3(x + y)^2 - 6y. \end{aligned}$$

Kritische Punkte:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) &= (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 3(x + y)^2 - 3 = 0 \\ 3(x + y)^2 - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 3 \\ (x + y)^2 = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow (x, y) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \vee (x, y) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

[Man prüft nach, daß tatsächlich $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ für $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(x, y) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6x + 6y = 6(x + y); & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= 6x + 6y = 6(x + y); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 6x + 6y = 6(x + y) & (= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 6x + 6y - 6 = 6(x + y - 1). \end{aligned}$$

Hessematrix $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$(D^2 f)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\det [(D^2 f)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}] = \det \begin{pmatrix} 6 - \lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2 - 45;$$
$$\Rightarrow \left(\det [(D^2 f)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}] = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{3(1 - \sqrt{5}), 3(1 + \sqrt{5})\} \right).$$

Weil es eine positive, und eine negative Eigenwert für $(D^2 f)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gibt, ist $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein Sattelpunkt.

Hessematrix $(x, y) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$:

$$(D^2 f)(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix};$$
$$\det [(D^2 f)(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}] = \det \begin{pmatrix} -6 - \lambda & -6 \\ -6 & -12 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 9)^2 - 45;$$
$$\Rightarrow \left(\det [(D^2 f)(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}] = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-3(\sqrt{5} + 3), 3(\sqrt{5} - 3)\} \right).$$

Weil beide Eigenwerte von $(D^2 f)(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ negative sind, ist $(x, y) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Maximum.

Abgabe bis Montag 27.06.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.

Unter <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen> sind die Blätter im Internet abrufbar.

Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335