Mathematisches Institut LMU
Prof. Dr. H. Steinlein 11.04.2005

Übungsblatt 1 zu MPIIA

Aufgabe 1: (4 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die exakten Werte von $\sin x, \cos x, \tan x$ an den Stellen $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$.

b) Zeigen Sie, daß für $x, y \in]-1,1[$ gilt:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

(Hinweis: IV.3.14c).
Leiten Sie hiermit die Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \text{ her.}$$

Berechnen Sie damit und mit der Reihendarstellung vom Arcustangens π auf 8 Stellen (Herleitung, Fehlerabschätzung, Taschenrechner).

Aufgabe 2: (4 Punkte) Beweisen Sie die Formel von C. L. Dodgson, alias Lewis Caroll (Autor von "Alice im Wunderland"):

$$\arctan\frac{1}{p} = \arctan\frac{1}{p+m} + \arctan\frac{1}{p+n} \text{ wobei } p, m, n \in \mathbb{N} \text{ und } p^2 + 1 = mn.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte) Beweisen Sie die folgende Darstellung der Areafunktionen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arsinh} x &= \log(x + \sqrt{x^2+1}) \ , \ x \in \mathbb{R} \\
\operatorname{Arcosh} x &= \log(x + \sqrt{x^2-1}) \ , x \in [1, \infty[, \\
\operatorname{Artanh} x &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ , \ x \in]-1,1[\ , \\
\operatorname{Arcoth} x &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \ , \ x \in]1, \infty[\, .
\end{aligned}$$

b.w.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Eine *Hamilton-Funktion* ist eine C^1-Funktion $H : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$ offene Menge). Das zugehörige (ebene) *hamiltonsche System* besteht aus den (gekoppelten) Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

Diese beschreiben die Bewegung des Punktes (x, y) in der Ebene als Funktion der Zeit.

a) Gegeben eine Lösung $(x, y) : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ zu (1). Zeigen Sie, daß die Hamilton-Funktion H längs dieser Lösung konstant ist.

b) Sei $H(x, y) = y^2/2 - \cos x$. Leiten Sie das zugehörige *hamiltonsche System* her.

c) Einen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ nennt man eine *Ruhelage* (warum?). Zeigen Sie, daß $(x, y) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$, für die oben definierte Hamilton-Funktion alle Ruhelagen sind.

d) Aus a) folgt, daß jede Trajektorie $\{(x(t), y(t) \mid t \in I\}$ einer Lösung $(x, y) : I \to \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge einen geeigneter Niveaumenge

$$N_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = c\} \tag{2}$$

sein muß. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß $\{(x, \pm\alpha\cos(x/2)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ die Niveaumenge N_1 ist.

Zusatzaufgabe, ohne Punkte: Skizzieren Sie die Niveaumengen für $c = -1, 0, 1$ und 2.

Abgabe bis Montag 18.04.2005, *11.15* **Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.**

Unter `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen` **sind die Blätter im Internet abrufbar.**

Sprechstunden:	**H. Steinlein:**	**Mo 10-11, Zimmer 318**
	T. Sørensen:	**Mi 14-15, Zimmer 335**