

Übungsblatt 1 zu MPIIA

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die exakten Werte von $\sin x, \cos x, \tan x$ an den Stellen $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$.
- b) Zeigen Sie, daß für $x, y \in]-1, 1[$ gilt:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \left(\frac{x+y}{1-xy} \right).$$

(Hinweis: IV.3.14c).

Leiten Sie hiermit die Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \text{ her.}$$

Berechnen Sie damit und mit der Reihendarstellung vom Arcustangens π auf 8 Stellen (Herleitung, Fehlerabschätzung, Taschenrechner).

Aufgabe 2: (4 Punkte) Beweisen Sie die Formel von C. L. Dodgson, alias Lewis Carroll (Autor von "Alice im Wunderland"):

$$\arctan \frac{1}{p} = \arctan \frac{1}{p+m} + \arctan \frac{1}{p+n} \text{ wobei } p, m, n \in \mathbb{N} \text{ und } p^2 + 1 = mn.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte) Beweisen Sie die folgende Darstellung der Areafunktionen:

$$\operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, \infty[,$$

$$\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad x \in]-1, 1[,$$

$$\operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right), \quad x \in]1, \infty[.$$

b.w.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Eine *Hamilton-Funktion* ist eine C^1 -Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$ offene Menge). Das zugehörige (ebene) *hamiltonsche System* besteht aus den (gekoppelten) Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Diese beschreiben die Bewegung des Punktes (x, y) in der Ebene als Funktion der Zeit.

- Gegeben eine Lösung $(x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ zu (1). Zeigen Sie, daß die Hamilton-Funktion H längs dieser Lösung konstant ist.
- Sei $H(x, y) = y^2/2 - \cos x$. Leiten Sie das zugehörige *hamiltonsche System* her.
- Einen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ nennt man eine *Ruhelage* (warum?). Zeigen Sie, daß $(x, y) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$, für die oben definierte Hamilton-Funktion alle Ruhelagen sind.
- Aus a) folgt, daß jede Trajektorie $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ einer Lösung $(x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge einer geeigneten Niveaumenge

$$N_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = c\} \quad (2)$$

sein muß. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß $\{(x, \pm\alpha \cos(x/2)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ die Niveaumenge N_1 ist.

Zusatzaufgabe, ohne Punkte: Skizzieren Sie die Niveaumengen für $c = -1, 0, 1$ und 2 .

Abgabe bis Montag 18.04.2005, 11.15 Uhr in den MPIIA Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek.

Unter <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~sorensen> sind die Blätter im Internet abrufbar.

Sprechstunden: H. Steinlein: Mo 10-11, Zimmer 318
T. Sørensen: Mi 14-15, Zimmer 335