# Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

**Lösungen**

**Aufgabe 1 (4 Punkte):**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \end{array}\right).$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} \frac{-7}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{8}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \\ 8 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-7}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{8}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \\ 8 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2 (6 Punkte):**

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -7 & -3 & 0 & -7 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right.$$

$\det(A) = 0 \cdot 4 \cdot 2 + (-7) \cdot 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot (-7) = 6.$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & -7 & -3 & -\lambda & -7 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 1 & 4-\lambda \\ -1 & 1 & 2-\lambda & -1 & 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda) &= (-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) + (-7) \cdot 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 \cdot 1 \\ &\quad - (-1) \cdot (4-\lambda) \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot (-\lambda) - (2-\lambda) \cdot 1 \cdot (-7) \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6. \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß $-(1)^3 + 6 \cdot (1)^1 - 11 \cdot 1 + 6 = 0$, also ist $\lambda_1 = 1$ eine Eigenwert. Man faktorisiert: $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6)$. Man sieht daß $-\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$ die Lösungen $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ hat. Man bestimmt die zugehörigen Eigenvektoren von $A$:

$\underline{\lambda_1 = 1}$: $(A - \lambda_1)\underline{v}_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Von unten: $z$ freie Variable, $z = t \in \mathbb{R}$; dann $2y + z = 0$ also $y = -\frac{1}{2}t$; endlich $x + 3y + z = 0$, so $x = -y - 3z = \frac{1}{2}t$. Lösung: $\underline{v}_1 = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Probe:

$$A\underline{v}_1 = t \begin{pmatrix} 0 & -7 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underline{v}_1 = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1.$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $(A - \lambda_2)\underline{v}_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -7 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} -2 & -7 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Von unten: $z$ freie Variable, $z = t \in \mathbb{R}$; dann $3y + z = 0$ also $y = -\frac{1}{3}t$; endlich $x + 2y + z = 0$, so $x = -y - 2z = -\frac{1}{3}t$. Lösung: $\underline{v}_2 = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Probe:

$$A\underline{v}_2 = t \begin{pmatrix} 0 & -7 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \underline{v}_2.$$

$\underline{\lambda_3 = 3}$: $(A - \lambda_3)\underline{v}_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Von unten: $z$ freie Variable, $z = t \in \mathbb{R}$; dann $3y = 0$ also $y = 0$; endlich $x + y + z = 0$, so $x = -z = -t$. Lösung: $\underline{v}_1 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Probe:

$$A\underline{v}_3 = t \begin{pmatrix} 0 & -7 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \underline{v}_3 = \lambda_3 \cdot \underline{v}_3.$$

**Aufgabe 3 (8 Punkte):** $Ax = x$ ist das gleiche als $(A-1)x = 0$. Wir suchen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$A - 1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) - 1 & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei. Man bemerkt, daß

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\phi) - 1 & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) - 1 \end{pmatrix} = (\cos(\phi) - 1)^2 + \sin(\phi)^2 = 2 - 2\cos(\phi) \neq 0$$

wenn $\phi \in (0, 2\pi)$. Daß heisst, für $\phi \in (0, 2\pi)$ $(\phi \neq 0, \phi \neq 2\pi)$, ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ , $t \in \mathbb{R}$, die einzige Lösung zur $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Für $\phi = 0$ oder $\phi = 2\pi$ ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — dann ist $Ax = x$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^3$. Mann sieht daß $A$ eine Rotation in $\mathbb{R}^3$ ist; es ist die Rotation mit Vinkel $\phi$ um die $z$ - Achse. Wenn $\phi \neq 0, \phi \neq 2\pi$, werden Vektoren entlang der $z$ - Achse von $A$ nicht geändert $(Ax = x)$; wenn $\phi = 0$ passiert nichts ($A$ ist die Identitetsmatrix), wenn $\phi = 2\pi$ wird bloß eine volle Runde um die $z$ - Achse gedreht - im Enteffekt passiert hier auch nichts.

**Aufgabe 4 (4 Punkte):**

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix}; XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+3b \\ c+d & 2c+3d \end{pmatrix}.$$

Um $AX = XA$ zu haben, muss also

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+3b \\ c+d & 2c+3d \end{pmatrix} \quad \text{oder}$$

$$a + 2c = a + b\ ,\ a + 3c = c + d\ ,\ b + 2d = 2a + 3b\ ,\ b + 3d = 2c + 3d,$$

was folgendes entspricht:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt *zwei* freie Variablen: $d = t \in \mathbb{R}, c = s \in \mathbb{R}$. Von der 2. Zeile: $(-1)b + 2c = 0$ finden wir $b = 2c = 2s$; von der 1. Zeile: $a + 2c - d = 0$, also $a = d - 2c = t - 2s$. Die Lösung ist

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 2s \\ 2s \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} t - 2s & 2s \\ s & t \end{pmatrix} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Probe:

$$AX = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 2s+2t \\ t+s & 2s+3t \end{pmatrix} \;;\; XA = \begin{pmatrix} a+b & 2a+3b \\ c+d & 2c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 2s+2t \\ t+s & 2s+3t \end{pmatrix},$$

also $AX = XA$ für *alle* $s, t \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 5 (4 Punkte):** a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; $\det(A-\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda)+5 = \lambda^2+2\lambda-3$. Die Lösungen zur $\det(A-\lambda) = \lambda^2+2\lambda-3 = 0$ sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$. Eigenvektoren:

$\underline{\lambda_1 = 1}$: $(A-\lambda_1)\underline{v}_1 = 0$:

$$A-\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$x_2 = t \in \mathbb{R}; x_1 = -5x_2 = -5t$, Lösung $\underline{v}_1 = t\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Probe:

$$A\underline{v}_1 = t\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1.$$

$\underline{\lambda_2 = -3}$: $(A-\lambda_2)\underline{v}_2 = 0$:

$$A-\lambda_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$x_2 = t \in \mathbb{R}; x_1 = -x_2 = -t$, Lösung $\underline{v}_2 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Probe:

$$A\underline{v}_1 = t\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \underline{v}_2 = \lambda_2 \underline{v}_2.$$

b)$B = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$; $\det(B-\lambda) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 16 \\ -6 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)(-9-\lambda)+6\cdot 16 = \lambda^2-2\lambda-3$. Die Lösungen zur $\det(B-\lambda) = \lambda^2-2\lambda-3 = 0$ sind $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$. Eigenvektoren:

$\underline{\lambda_1 = 3}$: $(B-\lambda_1)\underline{v}_1 = 0$:

$$B-\lambda_1 = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$x_2 = t \in \mathbb{R}; x_1 = -2x_2 = -2t$, Lösung $\underline{v}_1 = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Probe:

$$B\underline{v}_1 = t\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1.$$

$\underline{\lambda_2 = -1}$: $(B-\lambda_2)\underline{v}_2 = 0$:

$$B-\lambda_2 = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$x_2 = t \in \mathbb{R}; x_1 = -\frac{4}{3}x_2 = -\frac{4}{3}t$, Lösung $\underline{v}_2 = t\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Probe:

$$A\underline{v}_1 = t\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \underline{v}_2 = \lambda_2 \underline{v}_2.$$

**Sprechstunden :**

Prof. Dr. W. Richert, Mo. $15^{00} - 16^{00}$ Uhr, Zi. 333.
Dr. T. Ø. Sørensen, Do. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 335.
I. Hoffmann, Mo. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 235.