MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. W. Richert / Dr. T. Ø. Sørensen

SoSe 2004
- Blatt 7 -
21.06.2004

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Lösungen

Aufgabe 1 (6 Punkte): a) Seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ so daß $\gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c = 0 \in \mathbb{R}^3$, daß heisst,

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ mit dem Gauß'chen Algoritmus (wir können die 0 - Spalte auslassen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösen wir jetzt von unten kriegen wir $3\gamma_3 = 0$, so $\gamma_3 = 0$. Von der mittleren Zeile kriegen wir dann $2\gamma_2 - 2\gamma_3 = 2\gamma_2 = 0$, so auch $\gamma_2 = 0$. Endlich, von der erste Zeile haben wir $3\gamma_1 + 4\gamma_2 + 8\gamma_3 = 3\gamma_1 = 0$, also ist $\gamma_1 = 0$. Als der einzige Lösung $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ ist, sind a, b, c linear *unabhängige*.

b) Wenn $\gamma_1 b + \gamma_2 c + \gamma_3 d = 0$, dann

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen den Gauß'chen Algoritmus:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Von unten: $-\gamma_3 = 0$, so $\gamma_3 = 0$; $2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 2\gamma_2 = 0$, so $\gamma_2 = 0$; $4\gamma_1 + 8\gamma_2 + 7\gamma_3 = 4\gamma_1 = 0$, so $\gamma_1 = 0$. Damit sind b, c, d linear unabhängige.

c) $\gamma_1 a + \gamma_2 c + \gamma_3 d = 0$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht, daß $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ eine Lösung ist, wenn man zuerst γ_3 (beliebig) wählt, dann γ_2 so daß $2\gamma_2 + \gamma_3 = 0$, und endlich γ_1, so daß $3\gamma_1 + 8\gamma_2 + 7\gamma_3 = 0$; man findet also daß für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung ist; die sind auch *alle* Lösungen. Also sind a, c, d *nicht* linear unabhängige - die sind linear *abhängige*. Mit z.B. $t = 2$ ist $-2a - c + 2d = 0$, so daß $a = d - \frac{1}{2}c; c = 2d - 2a; d = a + \frac{1}{2}c$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 2 & 3 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 18 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{array}\right); \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Von unten: $6x_3 = 24$, so $x_3 = 4$. Dann $-2x_2 + 3x_3 = -2x_2 + 12 = 6$, so $x_2 = 3$. Endlich $2x_1 + 4x_2 = 2x_1 + 12 = 16$, so $x_1 = 2$. Es gibt also *eine* Lösung, nähmlich

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir checken:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{6}{4} & \frac{9}{4} & \frac{6}{4} \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Von unten: wir können x_4 und x_3 beliebig wählen, dann sind die zwei letzte Gleichungen immernoch erfült $(0 = 0)$. Setzen wir $x_4 = s \in \mathbb{R}, x_3 = t \in \mathbb{R}$, dann folgt von der zweite Zeile $3x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 6$, also $x_2 = 2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 - 2t - 3s$, und von der erste Zeile, $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 10$, also $4x_1 = 10 - 5x_2 - 6x_3 - 7x_4 = 4t + 8s$, so daß $x_1 = t + 2s$. Also ist die vollständige Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 2s \\ 2 - 2t - 3s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

c) Die gleiche Berechnung wie in b) führt zu

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wieder kann man $x_3 (= t \in \mathbb{R})$ und $x_4 (= s \in \mathbb{R})$ beliebig wählen. Von der zweite Zeile folgt $3x_2 + 6t + 9s$, also $x_2 = -2t - 3s$, und von der erste, $4x_1 + 5(-2t - 3s) + 6t + 7s = 0$, also $x_1 = t + 2s$. Die vollständige Lösung ist also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Test:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\left\{t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}4\\6\\8\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\8\\10\end{pmatrix}.$$

a) Laut Skript gilt $\dim(U) = 4 - \mathrm{Rang}(A)$, wo U die Menge der Lösungen des *homogenen* Gleichungssystem ist. Wir haben $\dim(U) = 2$ (der Anzahl von Basisvektoren - die zwei die nach s und t stehen). Also ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$.

Aufgabe 4 (8 Punkte): a) Wir nehmen zuerst an, es gibt $s \in \mathbb{R}$ so daß $a = sb$ (d.h., a und b sind *parallel*). Seien $x, y \in A := \{a + tb \,|t \in \mathbb{R}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind $x = a + t_1 b, y = a + t_2 b, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, und damit

$$\begin{aligned}x + y &= a + (t_1 b + t_2 b + a) = a + (t_1 + t_2 + s)b \in A,\\ \lambda x &= \lambda a + \lambda t_1 b = a + (\lambda - 1)a + \lambda t_1 b = a + \big((\lambda-1)s + \lambda t_1\big)b \in A.\end{aligned}$$

Die beide Vektoren $x + y$ und λx gehören A weil sie sich darstellen lassen als $a + tb$ für ein $t \in \mathbb{R}$ (für $x + y$ haben wir $t = t_1 + t_2 + s$, für λx ist $t = (\lambda - 1)s + \lambda t_1$). Also ist A in diesem Fall eine lineare Unterraum (eine Gerade durch den Ursprung, mit richtung b).
Wenn die Vektoren a und b *nicht* parallel sind, dann ist, mit $x = a + t_1 b \in A, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda x = \lambda a + \lambda t_1 b.$$

Dies lasst sich *nicht* als $a + tb$ schreiben für ein $t \in \mathbb{R}$ (denn dann wäre $a = sb$ mit $s = (t - \lambda t_1)/(1 - \lambda)$). Also ist λx nicht in A, und damit ist A in diesemn Fall *nicht* eine lineare Unterraum.
b) Seien $x, y \in B := \{ta + sb \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}x &= t_1 a + s_1 b \quad , \quad t_1, s_1 \in \mathbb{R},\\ y &= t_2 a + s_2 b \quad , \quad t_2, s_2 \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

und damit

$$x + y = (t_1 + t_2)a + (s_1 + s_2)b \in B$$

($x + y$ lasst sich als $sa + tb$ schreiben, mit $t := t_1 + t_2, s := s_1 + s_2$), und

$$\lambda x = (\lambda t_1)a + (\lambda s_1)b \in B,$$

so B ist eine linare Unterraum.
c) Seien $x, y \in C := \{x \in \mathbb{R}^5 \,|\, Ax = 0\}, \lambda \in \mathbb{R}$. Das heisst, $Ax = Ay = 0$, und damit (durch linearitet von Matrix-multiplikation)

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0,$$

so $x + y \in C$. Weiter haben wir

$$A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

so daß $\lambda x \in C$ - damit ist C eine lineare Unterraum.

d)

Sei $x \in D := \{ra + sb + tc \,|\, r, s, t \in \mathrm{I\!R}_0^+; r + s + t = 1\}, x \neq 0$. Dann ist, bei der Dreicecksungleichung,

$$|x| \leq r|a| + s|b| + t|c| \leq r \max\{|a|, |b|, |c|\} + s \max\{|a|, |b|, |c|\} + t \max\{|a|, |b|, |c|\} \tag{1}$$
$$= (s + r + t) \max\{|a|, |b|, |c|\} = \max\{|a|, |b|, |c|\} \quad (\text{ als } r + s + t = 1).$$

Sei jetzt $\lambda = \frac{2\max\{|a|,|b|,|c|\}}{|x|}$, dann ist

$$|\lambda x| = \lambda\,|x| = 2\max\{|a|, |b|, |c|\} \geq \max\{|a|, |b|, |c|\}, \tag{2}$$

und damit kann λx *nicht* die ungleichung (1) erfüllen, und damit nicht in D liegen, *ausser* wenn $a = b = c$ (so daß $\max\{|a|, |b|, |c|\} = 0$ und *gleichung* in (2) gilt). Damit ist D kein lineare Unterraum *ausser* wenn $a = b = c = 0$; in diesem fall ist $D = \{0\}$ und damit eine lineare Unterraum. (Eine Zeichnung machen ist eine gute Idee!)

Sprechstunden :

Prof. Dr. W. Richert, Mo. $15^{00} - 16^{00}$ Uhr, Zi. 333.
Dr. T. Ø. Sørensen, Do. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 335.
I. Hoffmann, Mo. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 235.