MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. W. Richert / Dr. T. Ø. Sørensen

SoSe 2004
- Blatt 6 -
15.06.2004

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Lösungen

Aufgabe 1 (4 Punkte): (i) $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)\cdot(-2x)e^{-(x^2+y^2)} = 2x(1-(x^2+y^2))e^{-(x^2+y^2)}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2ye^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)\cdot(-2y)e^{-(x^2+y^2)} = 2y(1-(x^2+y^2))e^{-(x^2+y^2)}$, $\nabla f_1(x,y) = (\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}) = 2(1-(x^2+y^2))e^{-(x^2+y^2)}(x,y)$ (Der Vektor (x,y) mit dem Skalar (Zahl) $2(1-(x^2+y^2))e^{-(x^2+y^2)}$ multipliziert).
(ii) $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \ln(x) + \frac{x-y-z}{x}, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -\ln(x), \frac{\partial f_2}{\partial z} = -\ln(x), \nabla f_2(x,y,z) = (\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z}) = \ln(x)(1,-1,-1) + \frac{x-y-z}{x}(1,0,0)$.
(iii) $\frac{\partial f_3}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\sum_{j=1}^n x_j^2) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^2) = 2x_k$ (als

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x_j^2) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 2x_k & j = k.) \end{cases}$$

So

$$\nabla f_3(x_1,\ldots,x_n) = (\frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_3}{\partial x_n}) = (2x_1,\ldots,2x_n) = 2(x_1,\ldots,x_2).$$

(iv) $\frac{\partial f_4}{\partial x} = e^x \cdot e^y, \frac{\partial f_4}{\partial y} = e^x \cdot e^y, \nabla f_4(x,y) = (\frac{\partial f_4}{\partial x}, \frac{\partial f_4}{\partial y}) = (e^x\cdot e^y, e^x\cdot e^y) = e^x \cdot e^y(1,1)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte): a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x+y)^2 - 12y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3(x+y)^2 - 12x$, $\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (3(x+y)^2 - 12y, 3(x+y)^2 - 12x)$;

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 - 12y = 0 \\ \text{ und} \\ 3(x+y)^2 - 12x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y = 12x \\ \text{ und} \\ 3(x+y)^2 = 12x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ und} \\ 12x^2 - 12x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ und} \\ x = 0 \text{ oder } x = 1. \end{cases}$$

Die Nullstellen sind also $(0,0)$ und $(1,1)$.
b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3\cdot 2x\cdot y = 6xy, \frac{\partial f}{\partial y} = 3(x^2-1) + 3y^2, \nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (6xy, 3(x^2-1)+3y^2)$. So ist

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy = 0 \\ \text{ und} \\ 3(x^2-1) + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ \text{ und} \\ 3(x^2+y^2) = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ und } 3y^2 = 3 \\ \text{ oder} \\ y = 0 \text{ und } 3x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ und } y^2 = 1 \\ \text{ oder} \\ y = 0 \text{ und } x^2 = 1. \end{cases}$$

Also sind die Nullstellen $(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Ausgleichgerade (durch $(0,0)$): $y=\alpha x$.
a) $\underline{t}=(-1,0,1,2,3)$, $\underline{f}=(0,1,-1,2,5)$,

$$\alpha=\frac{(\underline{t},\underline{f})}{|\underline{t}|^2}=\frac{-1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 5}{(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2}=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}.$$

Also, $y=\frac{6}{5}x$.
b) $\underline{t}=(-1,0,1,2,3,4)$, $\underline{f}=(0,1,1,4,3,6)$, $\alpha=\frac{0+0+1+8+9+24}{(-1)^2+0+1+4+9+16}=\frac{42}{31}$; $y=\frac{42}{31}x$.
c) $\underline{t}=(0,1,2)$, $\underline{f}=(0,1,2)$, $\alpha=\frac{0+1+4}{0+1+4}=1$; $y=x$. (Die Ausgleichsgerade geht durch alle drei gegebene Punkte).

Aufgabe 4 (6 Punkte): Laut Sinus-Satz ist

$$\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)},$$

so daß

$$a=\frac{c\sin(A)}{\sin(C)}=\frac{c\sin(A)}{\sin(180^\circ-A-B)}\equiv f(c,A,B).$$

Also ist $a=f(8.4\text{cm},30^\circ,110^\circ)=6.534...\text{cm}$.
Es folgt von der Formel für f daß

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial c}&=\frac{\sin(A)}{\sin(180^\circ-A-B)}\ ;\qquad \frac{\partial f}{\partial B}=\frac{c\sin(A)\cos(180^\circ-A-B)}{\sin^2(180^\circ-A-B)},\\ \frac{\partial f}{\partial A}&=\frac{c\cos(A)}{\sin(180^\circ-A-B)}-\frac{c\sin(A)\cos(180^\circ-A-B)}{\sin^2(180^\circ-A-B)}.\end{aligned}$$

Wenn jetzt (c_0,A_0,B_0) die *richtige* Werte von die gemessene Grössen sind (die wir nicht kennen), und (c,A,B) die *gemessene* sind, dann gilt daß $|c_0-c|\le 0.1\text{cm}$, $|A-A_0|\le 1^\circ$, $|B-B_0|\le 1^\circ$. Ausserdem gilt, für einem $\theta\in(0,1)$, daß

$$\begin{aligned}f(c,A,B)&=f(c_0,A_0,B_0)+R_1\Big((c,A,B)+\theta\big((c_0,A_0,B_0)-(c,A,B)\big)\Big),\\ R_1\Big((c,A,B)+\theta\big((c_0,A_0,B_0)-(c,A,B)\big)\Big)&=(c-c_0)\frac{\partial f}{\partial c}\Big((c,A,B)+\theta\big((c_0,A_0,B_0)-(c,A,B)\big)\Big)\\ &\quad+(A-A_0)\frac{\partial f}{\partial A}\Big((c,A,B)+\theta\big((c_0,A_0,B_0)-(c,A,B)\big)\Big)\\ &\quad+(B-B_0)\frac{\partial f}{\partial B}\Big((c,A,B)+\theta\big((c_0,A_0,B_0)-(c,A,B)\big)\Big)\end{aligned}$$

Man bemerkt daß $A_0+\theta(A-A_0)$ zwischen 29° und 31° liegt, daß $B_0+\theta(B-B_0)$ zwischen 109° und 111° liegt, und daß $180^\circ-\big(A_0+\theta(A-A_0)\big)-\big(B_0+\theta(B-B_0)\big)$ deswegen zwischen 38° und 42° liegt. Dann ist

$$\begin{aligned}|\sin(A_0+\theta(A-A_0)|&\le\sin(31^\circ)<0.52,\\ |\cos(A_0+\theta(A-A_0)|&\le\cos(29^\circ)<0.88,\\ \Big|\cos(\pi-\big(A_0+\theta(A-A_0)\big)-\big(B_0+\theta(B-B_0)\big))\Big|&\le\cos(38^\circ)<0.79,\\ \Big|\sin(\pi-\big(A_0+\theta(A-A_0)\big)-\big(B_0+\theta(B-B_0)\big))\Big|&\ge\sin(38^\circ)>0.61.\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial c}\Big((c,A,B)+\theta\big((c_0,A_0,B_0)-(c,A,B)\big)\Big)\right| \le \frac{0.52}{0.61} < 0.86,$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial A}\Big((c,A,B)+\theta\big((c_0,A_0,B_0)-(c,A,B)\big)\Big)\right| \le 8.5\text{cm}\cdot\frac{0.52\cdot 0.79}{0.61\cdot 0.61} < 10.45\text{cm},$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial B}\Big((c,A,B)+\theta\big(c_0,A_0,B_0)-(c,A,B)\big)\Big)\right| \le 8.5\text{cm}\Big(\frac{0.88}{0.61}+\frac{0.52\cdot 0.79}{0.61\cdot 0.61}\Big) < 21.65\text{cm}.$$

So ist (NB: Hier muss man $A - A_0$ und $B - B_0$ in *Radianten* einsetzen!)

$$\begin{aligned}&\Big|R_1\Big(((c,A,B)+\theta\big((c_0,A_0,B_0)-(c,A,B)\big)\Big)\Big|\\ &\qquad\le 0.1\text{cm}\cdot 0.86+\frac{1}{360}2\pi\cdot 10.46\text{cm}+\frac{1}{360}2\pi\cdot 21.65\text{cm} < 0.65\text{cm}.\end{aligned}$$

Also ist $a = 6.5\text{cm} \pm 0.65\text{cm}$.

Aufgabe 5 (8 Punkte):

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3+12+10 & 6+16-5 & 0-8+25 \\ -1+3+0 & -2+4+0 & 0-2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 17 & 17 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{NICHT definiert!}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & -4 \\ 6 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & -4 \\ 11 & 24 & -13 \\ 9 & -5 & 27 \end{pmatrix},$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{NICHT definiert!}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{NICHT definiert!}$$

$$yA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$xy = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$yx = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix} = 7.$$

Sprechstunden :

Prof. Dr. W. Richert, Mo. $15^{00} - 16^{00}$ Uhr, Zi. 333.
Dr. T. Ø. Sørensen, Do. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 335.
I. Hoffmann, Mo. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 235.