MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. W. Richert / Dr. T. Ø. Sørensen

SoSe 2004
- Blatt 5 -
02.06.2004

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Lösungen

Aufgabe 1: a) Mit $f(x,y) = \ln(x^2+y^2), (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2+y^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},\\
\Delta f :&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0
\end{aligned}$$

(alles für *jedes* $(x,y) \neq (0,0)$). Also ist f harmonisch.
Mit $g(x,y) = e^x(x\cos(y) - y\sin(y)), (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= e^x(x\cos(y) - y\sin(y)) + e^x\cos(y);\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = e^x((x+2)\cos(y) - y\sin(y)),\\
\frac{\partial g}{\partial y} &= -e^x((x+1)\sin(y) + y\cos(y));\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -e^x((x+2)\cos(y) - y\sin(y)) = -\frac{\partial^2 g}{\partial x^2},
\end{aligned}$$

i.e., $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$; also ist auch g harmonisch.
b) Mit $f(x,y) = x^5 + ax^3y^2 + bxy^4, (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 5x^4 + 3ax^2y^2 + by^4;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20x^3 + 6axy^2,\\
\frac{\partial f}{\partial y} & 2ax^3y + 4bxy^3;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2ax^3 + 12bxy^2.
\end{aligned}$$

Gefragt wird daß

$$0 = \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (20+2a)x^3 + (6a+12b)xy^2 \quad \text{für } \textit{jedes } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Lösung ist $a = -10, b = 5$, d.h., $f(x,y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$ (man kontrolliert daß damit tatsächlich $\Delta f = 0$).

Aufgabe 2: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$; $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3^2 - 2$; $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_2x_3\exp(x_3x_4 - x_5) + x_2x_4(x_3^2-2)\exp(x_3x_4 - x_5)$; $\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_2x_3(x_3^2-2)\exp(x_3x_4-x_5)$; $\frac{\partial f}{\partial x_5} = -x_2(x_3^2-2)\exp(x_3x_4-x_5)$.
Punkt $(0,0,0,0,0)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0,0,0,0,0) + \sum_{i=1}^{5}(x_i - 0)\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0,0,0,0) + R_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\
&= 2 + x_1\cdot 1 + x_2\cdot(-2) + x_3\cdot 0 + x_4\cdot 0 + x_5\cdot 0 + R_1 = 2 + x_1 - 2x_2 + R_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5).
\end{aligned}$$

Punkt $(1,1,1,2,2)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(1,1,1,2,2) + \sum_{i=1}^{3}(x_i-1)\frac{\partial f}{\partial x_i}(1,1,1,2,2) + \sum_{i=4}^{5}(x_i-2)\frac{\partial f}{\partial x_i}(1,1,1,2,2) + \tilde{R}_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\
&= 2+1+1(1-2)\exp(2-2) + (x_1-1)\cdot 1 + (x_2-1)(1-2)\\
&\quad + (x_3-1)\big[2\exp(2-2)+2(1-2)\exp(2-2)\big] + (x_4-2)\cdot 1\cdot(1-2)\exp(0)\\
&\quad + (x_5-2)\big[-1(1-2)\exp(0)\big] + R_1(1,1,1,2,2)\\
&= x_1 - x_2 - x_4 + x_5 + 2 + \tilde{R}_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: a):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2\cos(x)\big(-\sin(x)\big)\cos^2(y) = -2\sin(x)\cos(x)\cos^2(y) = -\sin(2x)\cos^2(y),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2\cos(2x)\cos^2(y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 4\sin(2x)\cos^2(y),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\big(-\sin(2x)\cos^2(y)\big) = \big(-\sin(2x)\big)\cdot 2\cos(y)\big(-\sin(y)\big) = \sin(2x)\sin(2y),\\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\big(\sin(2x)\sin(2y)\big) = 2\sin(2x)\cos(2y),\\
\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\big(-2\cos(2x)\cos^2(y)\big) = \big(-2\cos(2x)\big)\big(2\cos(y)(-\sin(y)\big) = 2\cos(2x)\sin(2y)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \cos^2(x)\cdot 2\cos(y)\big(-\sin(y)\big) = -\cos^2(x)\sin(2y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\cos^2(x)\cos(2y),\\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y}\big(-2\cos(2y)\cos^2(x)\big) = 4\sin(2y)\cos^2(x);\\
\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}\Big).
\end{aligned}
$$

Damit ist die Taylor-Entwicklung von f um $(0,0)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + (x-0)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + (y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-0)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot 2(x-0)(y-0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) + \frac{1}{2}(y-0)(y-0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) + R_2(x,y)\\
&= 1 + x\cdot 0 + y\cdot 0 + \frac{1}{2}x^2(-2\cdot 1\cdot 1) + x\cdot y\cdot 0\\
&\quad + \frac{1}{2}y^2(-2\cdot 1\cdot 1) + R_2(x,y) = 1 - x^2 - y^2 + R_2(x,y).
\end{aligned}
$$

Als $a=(0,0)$ haben wir $a+\theta(\mathbf{x}-a) = \theta(x,y) = (\theta x,\theta y), 0<\theta<1$. Damit ist eine Darstellung des Restgliedes:

$$
\begin{aligned}
R_2(x,y) &= \frac{1}{3!}\Big[(x-0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\theta x,\theta y) + 3(x-0)^2(y-0)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\theta x,\theta y)\\
&\qquad + (x-0)(y-0)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(\theta x,\theta y) + (y-0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\theta x,\theta y)\Big]\\
&= \frac{2}{3}x^3\sin(2\theta x)\cos^2(\theta y) + x^2y\cos(2\theta x)\sin(2\theta y)\\
&\quad + xy^2\sin(2\theta x)\cos(2\theta y) + \frac{2}{3}y^3\cos^2(\theta x)\sin(2\theta y).
\end{aligned}
$$

b): Wir benützen daß $|\sin(t)| \leq |t|$, $|\cos(t) \leq 1$, und $0 < \theta < 1$:

$$\begin{aligned}
|R_2(x,y)| &\leq \frac{2}{3}|x|^3 \cdot |2\theta x| \cdot 1 + |x|^2|y| \cdot 1 \cdot |2\theta y| \\
&\quad + |x||y|^2|2\theta x| \cdot 1 + \frac{2}{3}|y|^3 \cdot |2\theta y| \cdot 1 \\
&\leq \frac{4}{3}|x|^4 + 2|x|^2|y|^2 + 2|x|^2|y|^2 + \frac{4}{3}|y|^4 = \frac{4}{3}|x|^4 + 4|x|^2|y|^2 + \frac{4}{3}|y|^4 \\
&\leq 2|x|^4 + 4|x|^2|y|^2 + 2|y|^2 = 2\Big(\big(|x|^2\big)^2 + \big(|y|^2\big)^2 + 2\big(|x|^2\big)\big(|y|^2\big)\Big) \\
&= 2\big(|x|^2 + |y|^2\big)^2.
\end{aligned}$$

Mit der Taschenrechner findet man, mit $P_2(x,y) = 1 - x^2 - y^2$:

$$\begin{aligned}
f(0.1, 0.2) &= 0.95095716705...., \\
P_2(0.1, 0.2) &= 0.95, \\
|R_2(0.1, 0.2)| &\leq 2\big((0.1)^2 + (0.2)^2\big)^2 = 0.005.
\end{aligned}$$

Von $f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y)$, $|R_2(x,y)| \leq 2\big(|x|^2 + |y|^2\big)^2$, würde man also finden $f(0.1, 0.2) = 0.95 \pm 0.005$. Wir sehen, daß der richtige Wert von $f(0.1, 0.2)$ tatsächlich im interval $[0.95 - 0.005, 0.95 + 0.005]$ liegt. Bemerk, daß 0.005 ungefähr 0.5% von 0.95 ist - also ist der wert von P_2 im Punkt $(0.1, 0.2)$ eine ziemlich gute Annäherung zur $f(0.1, 0.2)$.

Sprechstunden :

Prof. Dr. W. Richert, Mo. $15^{00} - 16^{00}$ Uhr, Zi. 333.
Dr. T. Ø. Sørensen, Do. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 335.
I. Hoffmann, Mo. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 235.