Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Lösungen

Aufgabe 1 (1+2+1+1 Punkte):

a) Wir bemerken zuerst, daß $\lim_{k\to\infty}(1+\frac{3}{k})^k = e^3 \doteq 20.1$. Insbesonders, es gibt $N \in \mathbb{N}$ so daß $0 \leq (1+\frac{3}{k})^k \leq 21$ wenn $k \geq N$. Als $|(-1)^{3k}(1+\frac{1}{k^2})| \leq 2$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, haben wir, für $k \geq N$,

$$|a_k| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \leq \sqrt{2^2 + 21^2} = \sqrt{445} < 22.$$

Damit ist die Folge beschränkt: man nimmt $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 22\}$, dann ist $|a_k| \leq K$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

b) Von oben haben wir, daß

$$y_k = (1+\frac{3}{k})^k \to e^3 \quad , \quad k \to \infty. \tag{1}$$

Anderseits,

$$x_k = \begin{cases} 1+\frac{1}{k^2} & k \text{ gerade,} \\ -(1+\frac{1}{k^2}) & k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so daß

$$x_{2m} \to 1 \quad , \quad m \to \infty \tag{2}$$
$$x_{2m+1} \to -1 \quad , \quad m \to \infty. \tag{3}$$

Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ hat also zwei Häufungspunkte. Wir beweisen daß die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ dann die zwei Häufungspunkte $(-1, e^3) \in \mathbb{R}^2$ und $(1, e^3) \in \mathbb{R}^2$ hat. Die Definition einer Häufungspunkt ist: α ist ein Häufungspunkt für $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ wenn, und nur wenn,

$$\forall \epsilon > 0: \quad \text{Es gibt unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n \in K_\epsilon(\alpha),$$

wo $K_\epsilon(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x - \alpha| < \epsilon\}$.

Von (1) gilt daß es, für jedes $\epsilon > 0$, ein $N_1 \in \mathbb{N}$ gibt so daß $k > N_1 \Rightarrow |y_k - e^3| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Aus (2) folgt es, daß es, für jedes $\epsilon > 0$, ein $N_2 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $2m > N_2 \Rightarrow |x_{2m} - 1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Also hat man, daß wenn $k \in \mathbb{N}$ *gerade* ist, und $k > \max\{N_1, N_2\}$, dann ist

$$|a_k - (1, e^3)| = \sqrt{(x_k - 1)^2 + (y_k - e^3)^2} < \sqrt{\Big(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\Big)^2} = \epsilon,$$

also ist $a_k \in K_\epsilon((1, e^3))$. Solche k's (die gerade sind, und grösser als $\max\{N_1, N_2\}$ sind) gibt es unendlich viele - also is $(1, e^3)$ ein Häufungspunkt. Auf gleicher Weise beweisst man, daß auch $(-1, e^3)$ ein Häufungspunkt ist, indem man statt (2), (3) verwendet.

c) Nein: laut Skript ist eine Folge konvergent wenn, und nur wenn, es beschränkt ist, und genau *eine* Häufungspunkt hat. Also kann die Folge nicht konvergent sein.

d) Man bemerkt, daß die Folge $\{|x_k|\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist: $|x_k| = 1 + \frac{1}{k^2} \to 1, k \to \infty$. Auch die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, wie oben schon benutzt worden ist: $y_k \to e^3, k \to \infty$. Damit konvergieren die zwei Koordinat-folgen von der Punktfolge $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, und damit die Folge selber, laut Aufgabe 4 unten: wir haben $b_k \to (1, e^3), k \to \infty$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Wenn $(x, y) \in K_2((0,0))$, dann ist $x^2 \leq x^2 + y^2$, so daß $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)| < 2$. Auf gleicher Weise kriegt man daß $|y| < 2$, wenn $(x, y) \in K_2((0,0))$. Also hat man, für $(x, y) \in K_2((0,0))$,

$$|f(x,y)| = \left|3x^2 - 7y^3 + 2xy\right| \leq 3|x|^2 + 7|y|^3 + 2|x|\,|y| < 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 76.$$

Damit gilt daß die Menge $\left\{f(x,y) \,\middle|\, (x,y) \in K_2((0,0))\right\}$ beschränkt ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Es gilt, für jedes $a, b \in \mathbb{R}^n$, daß $|a + b| \leq |a| + |b|$, weil $|\cdot|$ ein *Norm* ist. Mit $a = x - y, b = y$ kriegt man

$$|x| = |(x - y) + y| = |a + b| \leq |a| + |b| = |x - y| + |y|.$$

Das heisst, daß $|x| - |y| \leq |x - y|$. Auf der andere Seite, mit $a = y - x, b = x$ kriegt man

$$|y| = |(y - x) + x| = |a| + |b| \leq |a| + |b| = |y - x| + |x| = |x - y| + |x|.$$

Die letzte Gleichung wieder weil $|\cdot|$ ein Norm ist. Das gibt also $|y| - |x| \leq |x - y|$. Als $-(|x| - |y|) = |y| - |x|$, haben wir also $|x| - |y| \leq |x - y|$ und $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$ - und damit $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Aufgabe 4 (5 Punkte): $\Rightarrow$: Angenommen wird also daß $a_k \to \alpha, k \to \infty$. Das heisst, laut Skript (Satz in §Punktfolgen), gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : k > N \Rightarrow |a_k - \alpha| < \epsilon.$$

Jetzt ist aber (für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$), mit $a_k = ((a_k)_1, (a_k)_2, \ldots, (a_k)_n)) \in \mathbb{R}^n$,

$$|(a_k)_i - \alpha_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left((a_k)_j - \alpha_j\right)^2} = |a_k - \alpha| < \epsilon$$

wenn $k > N$. Das heisst, für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $(a_k)_i \to \alpha_i, k \to \infty$.

$\Leftarrow$: Angenommen wird daß für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es N_i so daß

$$k > N_i \Rightarrow |(a_k)_i - \alpha_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

(Man bemerkt, daß N_i durchaus von i abhängen kann.) Sei jetzt $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$. Wenn $k > N$, dann ist $k > N_i$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$, so daß $|(a_k)_i - \alpha_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ für *jedes* $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Also ist, wenn $k > N$,

$$|a_k - \alpha| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left((a_k)_j - \alpha_j\right)^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{n \cdot \frac{\epsilon^2}{n}} = \epsilon.$$

Das heisst, $a_k \to \alpha, k \to \infty$.

Sprechstunden :

Prof. Dr. W. Richert, Mo. $15^{00} - 16^{00}$ Uhr, Zi. 333.
Dr. T. Ø. Sørensen, Do. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 335.
I. Hoffmann, Di. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 235.