MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. W. Richert / Dr. T. Ø. Sørensen

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Lösungen

Aufgabe 1 (1+1+3+1+1+3 Punkte): a) Mit $x = (7, 2, 8, 4, 6)$ ist
$|x| = \sqrt{7^2 + 2^2 + 8^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{169} = 13$.
b) Mit $x = (3, 1, 7), y = (7, 5, 2)$ ist $x - y = (3 - 7, 1 - 5, 7 - 2) = (-4, -4, 5)$, so daß $|x - y| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{57} \doteq 7.55$.
c) Man muss nachweisen daß $| \ |_{\max}$ folgendes erfült:

(i) $|x|_{\max} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und $|x|_{\max} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $|\lambda x|_{\max} = |\lambda| \, |x|_{\max}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $|x + y|_{\max} \leq |x|_{\max} + |y|_{\max}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Zum (i): Mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $|x_i| \geq 0$ für jedes $i = 1, \ldots .n$, und damit ist auch $|x|_{\max} \geq 0$. Wenn $x = 0$, ist $|x_i| = 0$ für jedes $i = 1, \ldots, n$, und damit $|x|_{\max} = 0$. Umgekehrt, ist $|x|_{\max} = 0$, dann ist also, für jedes $i = 1, \ldots, n$, $0 \leq |x_i| \leq \max\left\{|x_i| \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\} = |x|_{\max} = 0$, so daß $|x_i| = 0$ für jedes $i = 1, \ldots, n$, und damit $x = 0$.
Zum (ii): Sei $\lambda \in \mathbb{R}, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, und wenn jetzt $j \in \{1, \ldots, n\}$ so ist, daß $|x|_{\max} = \max\left\{|x_i| \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\} = |x_j|$, dann ist also, für jedes $i = 1, \ldots, n$, $|x_i| \leq |x_j|$, und damit $|\lambda x_i| = |\lambda| \, |x_i| \leq |\lambda| \, |x_j| = |\lambda x_j|$, so daß $|\lambda x|_{\max} = \max\left\{|\lambda x_i| \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\} = |\lambda x_j| = |\lambda| \, |x_j| = |\lambda| \, |x|_{\max}$.
Zum (iii): Es gilt, für jedes $i = 1, \ldots, n$, daß $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ (die $x_i's$ und $y_i's$ sind ja reellen Zahlen). Deswegen ist, für jedes $i = 1, \ldots, n$, $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max\left\{|x_i| \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\} + \max\left\{|y_i| \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\} = |x|_{\max} + |y|_{\max}$. Sei jetzt $j \in \{1, \ldots, n\}$ so daß $|x_j + y_j| = \max\left\{|x_i + y_i| \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\}$, dann ist also $|x + y|_{\max} = \max\left\{|x_i + y_i| \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\} = |x_j + y_j| \leq |x|_{\max} + |y|_{\max}$.
d) Mit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (4, -9, 2, -3, 7, 6)$ ist

$$|x|_{\max} = \max\left\{|4|, |-9|, |2|, |-3|, |7|, |6|\right\} = \max\left\{4, 9, 2, 3, 7, 6\right\} = 9.$$

Mit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-7, -4, -6, 10, 3)$ ist

$$|x|_{\max} = \max\left\{|-7|, |-4|, |-6|, |10|, |3|\right\} = \max\left\{7, 4, 6, 10, 3\right\} = 10.$$

e) Mit $x = (7, 3, -1, 2), y = (-5, 1, 9, 4)$ ist $x - y = (7 - (-5), 3 - 1, -1 - 9, 2 - 4) = (12, 2, -10, -2)$, und damit

$$|x - y|_{\max} = \max\left\{|12|, |2|, |-10|, |-2|\right\} = \max\left\{12, 2, 10, 2\right\} = 12.$$

f) Bei K: Die Punkten $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ so daß $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1$ sind genau alle Punkten innerhalb vom Kreis mit Radius 1 und Zentrum $(0, 0)$ (der Kreis selber ist nicht enthaltet; die Punkten auf dem Kreis haben ja genau (euklidische) Abstand 1 zum Ursprung in $\mathbb{R}^2$).

Bei $K_{\max}$ bemerkt man, daß $|x|_{\max} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ genau dann kleiner als 1 ist, wenn $|x_1| < 1$ *und* $|x_2| < 1$. Diese Punkte sind genau die die innerhalb vom Viereck mit Ecken in die Punkten $(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)$ liegen.

Sehe die Zeichnungen auf der Homepage.

Aufgabe 2 (4+4+1 Punkte): a) Wir unterscheiden zuerst zwischen $a = 0$ und $a \neq 0$.

Für $a = 0$ ist $g_a(y) = f(a,y) = f(0,y) = \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = 0$ für $y \neq 0$, und $g_a(0) = f(0,0) = 0$, so daß, für jedes $y \in \mathbb{R}$, $g_a(y) = 0$. Diese ist natürlich eine stetige Funktion. Also ist g_a stetig für $a = 0$.

Für $a \neq 0$ ist $g_a(y) = f(a,y) = \frac{ay}{a^2+y^2}$ für $y \neq 0$. Dies ist auch eine stetige Funktion (also, g_a ist stetig für $y \neq 0$). Weiter ist $g_a(0) = f(a,0) = \frac{a\cdot 0}{a^2+0^2} = 0$ (hier haben wir verwendet daß $a \neq 0$). Jetzt ist $\lim_{y\to 0} g_a(y) = \lim_{y\to 0} \frac{ay}{a^2+y^2} = \frac{a\cdot 0}{a^2+0^2} = 0 = g_a(0)$, so daß g_a auch für $y = 0$ stetig ist. Also ist g_a auch stetig für $a \neq 0$.

Der Beweis für f_b geht ähnlich.

b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq -1, \lambda \neq 0$, und sei $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $c_n \neq 0$, $c_n \to 0, n \to \infty$ (z.B. $c_n = \frac{1}{n}$). Sei $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Punktfolge in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $(x_n,y_n) = (\lambda c_n, c_n)$. Dann ist (weil $\lambda \neq 0, \lambda \neq -1$)

$$f(x_n,y_n) = \frac{x_n y_n}{x_n^2+y_n^2} = \frac{(\lambda c_n)c_n}{(\lambda c_n)^2+c_n^2} = \frac{\lambda c_n^2}{\lambda^2 c_n^2 + c_n^2} = \frac{\lambda c_n^2}{(\lambda+1)c_n^2} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \neq 0 = f(0,0).$$

Aber, als $c_n \to 0, n \to \infty$ haben wir $|c_n| \to 0, n \to \infty$, und damit

$$\begin{aligned} |(x_n,y_n) - (0,0)| &= |(x_n,y_n)| = \sqrt{x_n^2+y_n^2} = \sqrt{(\lambda c_n)^2 + c_n^2} \\ &= \sqrt{(\lambda^2+1)c_n^2} = |c_n|\sqrt{\lambda^2+1} \to 0 \quad , \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Das heisst, $(x_n,y_n) \to (0,0), n \to \infty$, aber $f(x_n,y_n) \not\to f(0,0), n \to \infty$ — dann kann aber $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ nicht stetig sein.

Sprechstunden :

Prof. Dr. W. Richert, Mo. $15^{00} - 16^{00}$ Uhr, Zi. 333.
Dr. T. Ø. Sørensen, Do. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 335.
I. Hoffmann, Di. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 235.