MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. W. Richert / Dr. T. Ø. Sørensen

SoSe 2004
- Blatt 1 -
10.05.2004

# Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

**Lösungen**

**Aufgabe 1 (5 Punkte):** a). Wir verwenden $\left(\frac{h}{g}\right)' = \frac{h'g-hg'}{g^2}$ $(\frac{NAZ-ZAN}{N^2})$, so daß

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{2x\cdot\cos^2 x - (x^2+1)(\cos^2 x)'}{\cos^4 x}$$
$$= \frac{2x\cos^2 x - (x^2+1)\cdot(-\sin x\cos x)}{\cos^4 x} = \frac{2x\cos x + 2(x^2+1)\sin x}{\cos^3 x}.$$

b) Wir verwenden (mehrere Male!) die Kettenregel $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$, so daß

$$f'(x) = a\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{e^x+1}}}\cdot\left(x^2+\sqrt{e^x+1}\right)' = \frac{a}{2\sqrt{x^2+\sqrt{e^x+1}}}\cdot\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{e^x+1}}\cdot\left(e^x+1\right)'\right)$$
$$= \frac{a}{2\sqrt{x^2+\sqrt{e^x+1}}}\left(2x+\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\right).$$

c) Wir verwenden die Kettenregel, und $(h\cdot g)' = h'g + fg'$:

$$f'(x) = 5x^4\cdot\big(\ln(5x^3)\big)^2 + x^5\cdot 2\ln(5x^3)\cdot\big(\ln(5x^3)\big)'$$
$$= 5x^4\big(\ln(5x^3)\big)^2 + 2x^5\ln(5x^3)\cdot\frac{1}{5x^3}(5x^3)'$$
$$= 5x^4\big(\ln(5x^3)\big)^2 + 2x^5\ln(5x^3)\cdot\frac{15x^2}{5x^3}$$
$$= 5x^4\big(\ln(5x^3)\big)^2 + 6x^4\ln(5x^3) = x^4\ln(5x^3)\big(5\ln(5x^3)+6\big).$$

d)

$$f'(x) = 3x^2\ln(\sqrt{\cos 2x}+\tfrac{1}{x}) + (x^3+2)\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}+\frac{1}{x}}\cdot\left(\sqrt{\cos 2x}+\tfrac{1}{x}\right)'$$
$$= 3x^2\ln\left(\sqrt{\cos 2x}+\tfrac{1}{x}\right) + \frac{x^3+2}{2\sqrt{\cos 2x}+\frac{1}{x}}\left(\sqrt{\cos 2x}\cdot 2(-\sin 2x) - \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 3x^2\ln\left(\sqrt{\cos 2x}+\tfrac{1}{x}\right) - \frac{x^3+2}{\sqrt{\cos 2x}+\frac{1}{x}}\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} - \frac{1}{x^2}\right).$$

e)

$$f'(x) = -\sin\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)\cdot\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)'\cdot\sin(7e^x) + \cos\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)\cdot\cos(7e^x)\cdot 7e^x$$
$$= -\sin(7e^x)\sin\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}\cdot\left(e^{\sqrt{x}}\right)' + 7e^x\cos(7e^x)\cos\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)$$
$$= -\sin(7e^x)\sin\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)\frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})' + 7e^x\cos(7e^x)\cos\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)$$
$$= --\sin(7e^x)\sin\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)\frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 7e^x\cos(7e^x)\cos\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)$$
$$= -\frac{e^{\sqrt{x}}\sin(7e^x)\sin\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right)}{4\sqrt{x}\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} + 7e^x\cos(7e^x)\cos\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right).$$

**Aufgabe 2 (Punkte):** Wir müssen in jedem Fall die Formel $P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$ verwenden, mit $x_0 = 4$.

a)

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 4\ln(1) + \sqrt{1+8} = 3;\\
f'(x) &= \ln(x-3) + x \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{2}{2\sqrt{1+2x}}\\
&= \ln(x-3) + \frac{x}{x-3} + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}; \qquad f'(4) = \ln 1 + \frac{4}{4-3} + \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{13}{3};\\
f''(x) &= \frac{x-6}{(x-3)^2} + 2\big(-\tfrac{1}{2}\big)\frac{1}{(1+2x)\sqrt{1+2x}} = \frac{x-6}{(x-3)^2} - \frac{1}{(1+2x)\sqrt{1+2x}};\\
f''(4) &= -2 - \frac{1}{9\sqrt{9}} = -2 - \frac{1}{27} = -\frac{28}{27};\\
P_2(x) &= 3 + \frac{13}{3}(x-4) + \frac{1}{2}(-\frac{28}{27})(x-5)^2 = \frac{1}{54}(-55x^2 + 674x - 1654).
\end{aligned}
$$

b) Man bemerkt, daß $f$ schon eine Quadratisches Polynom ist, und deswegen ist gleich $P_2(x) = f(x) = -4x^2 + 37x + 3$. Man kann auch blöd hinrechnen:

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 37 \cdot 4 - 4 \cdot 16 + 3 = 87;\\
f'(x) &= 37 - 8x; \quad f'(4) = 37 - 8 \cdot 4 = 5; \quad f''(x) = -8; \quad f''(4) = -8;\\
P_2(x) &= 87 + 5(x-4) + \frac{1}{2} \cdot (-8)(x-4)^2 = -4x^2 + 37x + 3 \equiv f(x).
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
f(4) &= \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\ ; \quad f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}; f'(4) = -\frac{1}{2 \cdot 4\sqrt{4}} = -\frac{1}{16}\ ;\\
f''(x) &= (-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}; \quad f''(4) = \frac{3}{4 \cdot 4\sqrt{4}} = \frac{3}{128}\ ;\\
P_2(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-4) + \frac{1}{2}\frac{3}{128}(x-4)^2 = \frac{1}{256}(3x^2 - 40x + 240).
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 0; \quad f'(x) = \cos\big(\frac{\pi x}{x}\big) - \frac{\pi}{8}\sin\big(\frac{\pi x}{8}\big); \quad f'(4) = 0;\\
f''(x) &= -\frac{\pi}{8}\sin\big(\frac{\pi x}{8}\big) - \frac{\pi}{8}\sin\big(\frac{\pi x}{8}\big) - \frac{\pi}{8}(x-4)\cos\big(\frac{\pi x}{8}\big) \cdot \frac{\pi}{8}\\
&= -\frac{\pi}{4}\sin\big(\frac{\pi x}{8}\big) - \frac{\pi^2}{64}(x-4)\cos\big(\frac{\pi x}{8}\big); \quad f''(4) = -\frac{\pi}{4};\\
P_2(x) &= 0 + 0 \cdot (x-4) + \frac{1}{2}\big(-\frac{\pi}{4}\big)(x-4)^2 = -\frac{\pi}{8}\big(x^2 - 8x + 16\big).
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 3 (5 Punkte):** Wir verwenden partielle Integration: $\int fg = Fg - \int Fg'$, wobei $F' = f$.

a) Mit $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$:

$$
\int \sin x \cos x\, dx = -\cos x \cos x - \int -\cos x(-\sin x)\, dx = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x\, dx.
$$

Wir haben nichts gewonnen! - Das Integral bleibt gleich - aber! - Tut es auf der andere Seite (und Integrationskonstante addieren), dann: $2\int \sin x \cos x\, dx = -\cos^2 x$, so daß

$\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$. Setzt man am Anfang $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$, so kriegt man

$$\int \sin x \cos x \, dx = \sin x \sin x - \int -\cos x(-\sin x) \, dx$$

so daß $\int sinx \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$. Als $\sin^2 x + \cos^x = 1$, hat man

$$\tfrac{1}{2}\sin^2 x + C = \frac{1}{2}\big(1 - \cos^2 x\big) + C \equiv -\frac{1}{2}\cos^2 x + \tilde{C} \quad , \quad \tilde{C} = \frac{1}{2} + C.$$

b) Ähnlich kriegt man, mit $f(x) = \cos(x); F(x) = \sin x; g(x) = \sin^k x; g'(x) = k \sin^{k-1} x \cos x$,

$$\int \sin^k x \cos x \, dx = \sin x \sin^k x - \int (\sin x) k \sin^{k-1} x \cos x \, dx = \sin^{k+1} x - k \int \sin^k x \cos x \, dx,$$

so daß $\int \sin^k x \cos x \, dx = \frac{1}{k+1}\sin^{k+1} x$. (Wenn man b) zuerst löst, hat man natürlich gleich a) gelöst; einfach $k = 1$ einsetzen).

c) Man setzt $f(x) = \ln(x), g(x) = \ln(x)$, dann ist $F(x) = x\ln(x) - x, g'(x) = \frac{1}{x}$. Das erste sieht man auch durch partielle Integration:

$$\int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x\ln(x) - \int 1 \, dx = x\ln(x) - x.$$

Jetzt ist also

$$\begin{aligned}\int (\ln(x))^2 \, dx = \int (\ln(x))(\ln(x)) \, dx &= \big(x\ln(x) - x\big)\ln(x) - \int \big(x\ln(x) - x\big) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x(\ln(x))^2 - x\ln(x) - \int \ln(x) \, dx + \int 1 \, dx \\ &= x(\ln(x))^2 - x\ln(x) - \big(x\ln(x) - x\big) + x = x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x.\end{aligned}$$

Kontrolle:

$$\begin{aligned}\Big(x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x\Big)' &= 1 \cdot (\ln(x))^2 + x \cdot \big((\ln(x))^2\big)' - 2 \cdot \ln(x) - 2x \cdot \frac{1}{x} + 2 \\ &= (\ln(x))^2 + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 2\ln(x) - 2 + 2 = (\ln(x))^2.\end{aligned}$$

**Aufgabe 4 (5 Punkte):** a) Die Folge $a_n = \frac{1}{|x|+n}$ ist positiv für jedes $x \in \mathbb{R}$, und abnehmend:

$$n < n+1 \Rightarrow |x| + n < |x| + (n+1) \Rightarrow \frac{1}{|x| + n} > \frac{1}{|x| + (n+1)} \Rightarrow a_n > a_{n+1}.$$

Daher ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *konvergent*, als es eine alternierende Reihe mit abnehmende (in Absolutbetrag) Gliedern ist (Leibniz-Kriterium).

b) Man bemerkt daß

$$\frac{5 - 2n^5 + 6n^2\sqrt{n}}{7n^2 + 4n^5\sqrt{n} + 3n^2} = (-1)\frac{2n^5 - 6n^2\sqrt{n} - 5}{4n^5\sqrt{n} + 10n^2} \equiv (-1)a_n,$$

und daß

$$\begin{aligned}10n^2 &\le 4n^5\sqrt{n} \quad (\text{für } n \ge 2) \\ 5 &\le \frac{1}{2n^5} \quad (\text{für } n > 1) \\ 6n^2\sqrt{n} &\le \frac{1}{2}n^5 \quad (\text{für } n > 2),\end{aligned}$$

so daß (für $n > 2$)

$$a_n \geq \frac{2n^5 - \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{2}n^5}{4n^5\sqrt{n} + 4n^5\sqrt{n}} = \frac{n^5}{8n^5\sqrt{n}} = \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist divergent - damit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch, und damit auch $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$. Die angegebene Reihe ist also *nicht* konvergent.

c) Die Aufgabe ist nicht ganz eindeutlich formuliert. Versteht man

$$\frac{2^n (n!)^3}{(4n!)} = \frac{2^n (n!)^3}{4(n!)} = \frac{2^n (n!)^2}{4} > 1 \quad , \quad \text{für } n > 2$$

ist die Reihe natürlich *nicht* konvergent.

Es sollte aber $\frac{2^n (n!)^3}{(4n)!}$ stehen. Dann ist

$$(4n)! = (4n)(4n-1)\cdots(4n-n)(4n-(n+1))\cdots(4n-2n)(4n-(2n+1))\cdots$$
$$\cdots(4n-3n)(4n-(3n+1))\cdots 3\cdot 2\cdot 1,$$

und

$$\frac{n!}{(4n-3n)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1} = 1,$$
$$\frac{n!}{(4n-2n)(4n-(2n+1))\cdots(4n-(3n-1))} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)} \leq 1;$$
$$\frac{n!}{(4n-n)(4n-(n+1))\cdots(4n-(2n-1))} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)} \leq 1,$$

so daß

$$\frac{2^n (n!)^3}{(4n)!} \leq \frac{2^n}{(4n)(4n-1)\cdots(4n-(n-1))} = \frac{2}{4n}\frac{2}{4n-1}\cdots\frac{2}{3n+1}.$$

Jetzt ist $\frac{2}{3n+k} \leq 1$ für jedes $n, k \in \mathbb{N}$, und $\frac{1}{4n-1} \leq \frac{1}{n}$ für jedes $n \geq 1$, so

$$\frac{2}{4n}\frac{2}{4n-1}\cdots\frac{2}{3n+1} \leq \frac{2}{4n}\frac{2}{4n-1}\cdot 1\cdots 1 = \frac{1}{n(4n-1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Das heisst, $\frac{2^n (n!)^3}{(4n)!} \leq \frac{1}{n^2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist, ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^3}{(4n)!}$ konvergent.

d) Man bemerkt, daß $n + 3 > n$, und daß $5 \leq \frac{1}{2}n$ für $n \geq 10$ gilt. Das heisst, für jedes $n \geq 10$ hat man

$$\frac{10}{(n+3)(n-5)} \leq \frac{10}{n(n-\frac{1}{2}n)} = \frac{20}{n^2}.$$

Als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist (und damit auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{n^2}$), ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{(n+3)(n-5)}$ konvergent.

e) Als $(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0, x > 0$, ist $\ln(x)$ eine wachsende Funktion. Damit hat man ($n \geq 16$ sichert daß das alles wohldefiniert ist)

$$n < n+1 \Rightarrow \ln n < \ln(n+1) \Rightarrow \ln(\ln n) < \ln(\ln(n+1))$$
$$\Rightarrow \ln(\ln(\ln n)) < \ln(\ln(\ln(n+1))) \Rightarrow \frac{1}{\ln(\ln(\ln n))} < \frac{1}{\ln(\ln(\ln(n+1)))}.$$

Daher ist $\sum_{n=16}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln(\ln n))}$ als alternierende Reihe mit (im Absolutbetrag) abnehmende Gleidern konvergent (Leibniz-Kriterium).

**Sprechstunden :**

Prof. Dr. W. Richert, Mo. $15^{00} - 16^{00}$ Uhr, Zi. 333.
Dr. T. Ø. Sørensen, Do. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 335.
I. Hoffmann, Di. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 235.