

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Abgabetermin: Mittwoch, 02.06.2004, 14.15 Uhr
(Übungskasten vor der Bibliothek)

Aufgabe 1 (6+4 Punkte): Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^2$ offen, heißt *harmonisch*, wenn gilt

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

- Zeigen Sie, daß die durch $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ bzw. durch $g(x, y) = e^x(x \cos(y) - y \sin(y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegebenen Funktionen harmonisch sind.
- Bestimmen Sie Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, so daß $f(x, y) = x^5 + ax^3y^2 + bxy^4$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ harmonisch ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2 + x_1 + x_2(x_3^2 - 2) \exp(x_3x_4 - x_5)$$

bis einschließlich der Glieder 1. Ordnung um den Punkt $(0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ bzw. um den Punkt $(1, 1, 1, 2, 2) \in \mathbb{R}^5$.

Aufgabe 3 (6+4 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos^2(x) \cos^2(y)$.

- Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von f um $(0, 0)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung. Geben Sie eine Darstellung des Restgliedes an.
(*Hinweis:* $2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$).
- Geben Sie eine obere Schranke für den Betrag des Restgliedes an. Werten Sie die Funktion f , ihre Taylor-Entwicklung und die obere Schranke für den Betrag des Restgliedes an der Stelle $(0.1, 0.2)$ aus.
(*Hinweis:* $|\sin(t)| \leq |t|$.)

Sprechstunden :

Prof. Dr. W. Richert, Mo. 15⁰⁰ – 16⁰⁰ Uhr, Zi. 333.
Dr. T. Ø. Sørensen, Do. 12⁰⁰ – 13⁰⁰ Uhr, Zi. 335.
I. Hoffmann, Mo. 12⁰⁰ – 13⁰⁰ Uhr, Zi. 235.