MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. W. Richert / Dr. T. Ø. Sørensen

SoSe 2004
- Blatt 3 -
10.05.2004

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Abgabetermin: Montag, 17.05.2004, 14.00 Uhr
(Übungskasten vor der Bibliothek oder in der Übung)

Aufgabe 1 (1+2+1+1 Punkte): Sei die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$a_k = (x_k, y_k) := \big((-1)^{3k}(1+\tfrac{1}{k^2}), (1+\tfrac{3}{k})^k\big) \in \mathbb{R}^2 \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, daß $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, daß $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ zwei Häufungspunkte hat.

c) Konvergiert die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$?

d) Zeigen Sie, das die Folge $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, mit $b_k = (|x_k|, y_k)$, in $\mathbb{R}^2$ konvergiert. (Hinweis: Aufgabe 4 unten).

Aufgabe 2 (4 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x,y) = 3x^2 - 7y^3 + 2xy.$$

Sei $K_2((0,0)) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |(x,y)| < 2\big\}$ der 'Kugel' (in $\mathbb{R}^2$) mit Radius 2 und Zentrum $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie, daß die Menge $\big\{f(x,y) \,\big|\, (x,y) \in K_2((0,0))\big\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist. (Hinweis: d.h., zeigen Sie die Existenz eine Konstante $C > 0$ so daß $|f(x,y)| \leq C$ für alle $(x,y) \in K_2((0,0))$.)

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie daß

$$\big|x-y\big| \geq \big||x| - |y|\big| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(Hinweis: verwenden Sie die Dreiecksungleichung auf $x = (x-y) + y$).

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ (d.h., $a_k \in \mathbb{R}^n$ für alle $k \in \mathbb{N}$), und $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgende Lemma:

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\alpha \in \mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow$
Für jeder $i = 1, \ldots, n$ gilt: Die i-te Komponente der Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen die i-te Komponente von α.

(d.h., mit $a_k = ((a_k)_1, (a_k)_2, \ldots, (a_k)_n)) \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$a_k \to \alpha \ , \ k \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n : \ (a_k)_i \to \alpha_i \ , \ k \to \infty \qquad)$$

Sprechstunden :

Prof. Dr. W. Richert, Mo. $15^{00} - 16^{00}$ Uhr, Zi. 333.
Dr. T. Ø. Sørensen, Do. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 335.
I. Hoffmann, Di. $12^{00} - 13^{00}$ Uhr, Zi. 235.