Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser

22.11.2023 WiSe 2023/24

Algebraische Geometrie 1
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Seien A ein Integritätsbereich und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A. Sei $\mathfrak{n} := \mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ das maximale Ideal der Lokalisierung $A_\mathfrak{m}$. Zeige: Für alle n ist die Abbildung

$$\varphi\colon A/\mathfrak{m}^n \to A_\mathfrak{m}/\mathfrak{n}^n, \qquad a + \mathfrak{m}^n \mapsto a + \mathfrak{n}^n$$

ein Isomorphismus. Ferner induziert φ einen Isomorphismus $\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{n}^r/\mathfrak{n}^n$ für alle $r < n$. Insbesondere, sind die Tangenzialkegel $G_\mathfrak{m}(A)$ und $G_\mathfrak{n}(A_\mathfrak{m})$ isomorph.

Aufgabe 2. Berechne die Dimension der affinen Varietät $V(xz - y^2, x^3 - yz, z^2 - x^2y) \subset \mathbb{A}^3$ mit Hilfe von Hilbert-Polynomen.

Aufgabe 3. Für eine ganze Zahl $l \geq 0$ definiere $Q_l(x) \in \mathbb{Q}[x]$ als $Q_0(x) = 1$ und

$$Q_l(x) = \binom{x}{l} = \frac{x(x-1)\cdots(x-l+1)}{l!}$$

für $l \geq 1$. Wir bemerken, dass $Q_l(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist. Für eine Funktion $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definiere

$$\Delta(g)\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$$

als $n \mapsto g(n+1) - g(n)$. Sei $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$.
Zeige, dass foldende Aussagen äquivalent sind:
(a) f ist eine $\mathbb{Z}$-lineare Kombination von Polynomen Q_l.
(b) $f(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
(c) $f(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \gg 0$, $n \in \mathbb{Z}$.
(d) $\Delta(f)$ erfüllt (a) und $f(n) \in \mathbb{Z}$ für mindestens ein $n \in \mathbb{Z}$.
Hinweis: Zeige zunächst, dass (a) und (d) äquivalent sind. Zeige danach die Implikation (c)$\Rightarrow$(d) per Induktion über $\deg(f)$.

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f eine polynom-ähnliche Funktion ist, wenn es ein Polynom $P_f \in \mathbb{Q}[x]$ existiert, sodass $f(n) = P_f(n)$ für alle $n \gg 0$, $n \in \mathbb{Z}$.
(a) Zeige: Falls das Polynom P_f existiert, dann ist es eindeutig.
(b) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
  (i) f ist polynom-ähnlich;
  (ii) $\Delta(f)$ ist polynom-ähnlich.
Zeige ferner, dass $\deg(P_f) = \deg(P_{\Delta(P_f)}) + 1$.
Hinweis: Sei $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ eine Funktion. Wenn $\Delta(g)(n) = 0$ für $n \gg 0$, dann ist g konstant für $n \gg 0$.