Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser

26.10.2023 WiSe 2023/24

Algebraische Geometrie 1
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ und sei M der größte Grad von Variablen $x_1, \dots, x_n$ in f. Angenommen, dass f auf der Menge

$$\mathbb{Z}^n_{M+1} := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq a_i \leq M+1 \text{ für alle } i\}$$

den Wert 0 annimmt. Zeige mit Induktion über n, dass $f = 0$ ist.

Aufgabe 2. Zeige: In Zariski-Topologie ist $\mathbb{N}^2$ dicht in $\mathbb{C}^2$.

Aufgabe 3. i) Seien k ein Körper und $f, g \in k[x, y]$ zwei irreduzible Polynome, so dass $f \nmid g$ und $g \nmid f$.
Zeige: Die Menge $V(f, g)$ der gemeinsamen Nullstellen von f und g ist endlich.
Hinweis: Schritt 1. Sei $K = k(x)$. Zeige mit Hilfe des Lemmas von Gauß, dass f und g keine gemeinsamen Teiler im Hauptidealring $K[y]$ haben. Insbesondere gibt es $p, q \in K[y]$ mit $pf + qg = 1$.
Schritt 2. Zeige, dass es ein Polynom $h \in k[x]$ und Polynome $a, b \in k[x, y]$ existieren, so dass $h = af + bg$.
Schritt 3. Zeige, dass es endlich viele Möglichkeiten für die x-Koordinate von Punkten aus $V(f, g)$ gibt. Folgere daraus, dass $V(f, g)$ endlich ist.

ii) Zeige: Die einzigen affinen algebraischen Mengen in $\mathbb{A}^2$ außer $\mathbb{A}^2$ selbst sind endliche Vereinigungen von Punkten und Kurven.