LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Nikita Geldhauser

Wintersemester 2023/24
15.04.2024

Algebraische Geometrie 1

Nachklausur

Nachname: __________ Vorname: __________

Matrikelnr.: __________ Fachsemester: __________

Abschluss: Bachelor, PO ❑ 2011 ❑ 2015 ❑ 2021 Master, PO ❑ 2011 ❑ 2021

Lehramt Gymnasium: ❑ modularisiert ❑ nicht modularisiert

❑ Diplom ❑ Anderes: __________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ______

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ______

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
Bitte überprüfen Sie, ob Sie **fünf Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.
Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	$\sum$
/13	/9	/9	/10	/9	/50

Name: ______________________________

Aufgabe 1. [5+8 Punkte]

Seien $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ zwei Polynome. Wir nehmen an, dass die Leitmonome von f und g (bzgl. einer festen Monomordnung) teilerfremd sind.
Schreibe $f = LM(f) + p$ und $g = LM(g) + q$ mit $p, q \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.
a) Zeige: $LM(pg) \neq LM(qf)$.
b) Zeige: $\overline{S(f,g)}^{\{f,g\}} = 0$, wobei $S(f,g)$ das S-Polynom von f und g bezeichnet.
Hinweis zu b): Ohne Einschränkung können Sie annehmen, dass die Leitkoeffizienten von f und g gleich 1 sind. Abhängig vom gewählten Lösungsweg ist die Aufgabe a) nützlich.

a) Angenommen $LM(pg) = LM(qf)$ $\Rightarrow$ $LM(f) \mid LM(p)$

$LM(pg) = LM(p) \cdot LM(g)$, $LM(qf) = LM(q) \cdot LM(f)$

$LM(f)$ & $LM(g)$ sind teilerfremd

Widerspruch, da $LM(p) < LM(f)$

Seien ohne Einschränkung $LC(f) = LC(g) = 1$

b) $S(f,g) = LM(g) \cdot f - LM(f) \cdot g = (g - q) \cdot f - (f - p) \cdot g =$

$LM(f)$ & $LM(g)$ sind teilerfremd

$= p \cdot g - q \cdot f$

nach a) die Leitterme von $p \cdot g$ und von $q \cdot f$ kürzen sich nicht

$\Downarrow$ Euklidischer Algorithmus

$\overline{S(f,g)}^{\{f,g\}} = 0.$

Name: ______________________________

Aufgabe 2. [9 Punkte]

Geben Sie ein Beispiel von zwei projektiven Varietäten X und Y über dem Körper $\mathbb{C}$ und von einem Morphismus von projektiven Varietäten $f\colon X \to Y$ an, sodass f bijektiv, aber kein Isomorphismus ist. Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Ein solches Beispiel existiert bereits für eindimensionale projektive Varietäten X und Y. Man kann sogar $X = \mathbb{P}^1$ nehmen.

$X = \mathbb{P}^1, \quad Y = V(\underbrace{y^3 - xz^2}_{\text{ein irr. Polynom}}) \subset \mathbb{P}^2$

$f: \underset{\mathbb{P}^1}{\overset{}{X}} \to \underset{V(y^3-xz^2)}{Y}$

$[s,t] \mapsto [s^3, st^2, t^3]$

kein Iso, da X glatt und Y singulär ist:

Jacobi-Kriterium:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$(-z^2 \quad 3y^2 \quad -2xz) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$\Rightarrow y = z = 0$

$\Rightarrow [1,0,0]$ ist ein singulärer Punkt auf Y

f ist wohl definiert

f ist injektiv:

$[s^3, st^2, t^3] = [s'^3, s't'^2, t'^3]$

$\Rightarrow$ Fall 1: $t = 0 \qquad [1,0] \mapsto [1,0,0]$

Fall 2: $t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad [s,t] = [st^2, t^3] = [s't'^2, t'^3] = [s', t']$

f ist surjektiv: $\quad z = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \& \quad f([1,0]) = [1,0,0]$

$z \neq 0 \Rightarrow f(\underbrace{[y,z]}_{\in \mathbb{P}^1}) = [xz^2, yz^2, z^3] = [x,y,z]$

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [9 Punkte]

Berechne das Hilbert-Polynom des homogenen Ideals $J := \langle xz, xw, yz, yw \rangle \lhd \mathbb{C}[x,y,z,w]$. Wie sieht $V(J)$ geometrisch in $\mathbb{P}^3$ aus?

Lösung 1: Wir zählen Monome vom Grad d:

$x^d,\ y^d,\ z^d,\ w^d,\quad x^a y^{d-a},\quad z^a \cdot w^{d-a}$

$d > a > 0$

$\Rightarrow 4 + 2(d-1) = 2(d+1)$

Alternative Lösung: $J = \langle xz, xw, yz, yw \rangle = \langle x,y \rangle \cdot \langle z,w \rangle$

Geometrisch: Gerade $x = y = 0$ in $\mathbb{P}^3$ $\cup$ Gerade $z = w = 0$ in $\mathbb{P}^3$

$[0, 0, *, *]$ $\qquad$ $[*, *, 0, 0]$

D. h. zwei Geraden in $\mathbb{P}^3$ mit leerem Schnitt

Hilbert-Polynom (eine Gerade in $\mathbb{P}^3$) $= t+1$

Hilbert-Polynome sind additiv $\Rightarrow$ Hilbert-Polynom (2 disjunkte Geraden) $=$

$= 2(t+1)$

Name: ______________________________

Aufgabe 4. [10 Punkte]

Seien A und B kommutative Ringe und $f\colon B \to A$ ein Ringhomomorphismus.
Sei $f^*\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ der induzierte Morphismus mit $f^*(\mathfrak{p}) := f^{-1}(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.
Zeige: Für alle Ideale I von A gilt

$$V(f^{-1}(I)) = \overline{f^*(V(I))},$$

wobei standardmäßig für einen kommutativen Ring R und eine Teilmenge $J \subset R$ die Menge $V(J) \subset \operatorname{Spec} R$ als $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \mid J \subset \mathfrak{q}\}$ definiert ist.
Hinweis: Es ist nicht schwer die Inklusion "$\supset$" zu zeigen.

„$\supset$" $\quad I \subseteq p \Rightarrow f^{-1}(I) \subseteq f^{-1}(p) \Rightarrow \{f^{-1}(p) \mid I \subseteq p\} \subseteq V(f^{-1}(I))$

$\Rightarrow \quad \overline{\{f^{-1}(p) \mid I \subseteq p\}} \subseteq V(f^{-1}(I))$

$V(\dots)$ ist immer abgeschlossen

„$\subset$" $\quad Y := \{f^{-1}(p) \mid I \subseteq p\} = f^*(V(I))$

$$\overline{Y} \underset{\text{Def}}{=} \bigcap_{J:\ Y \subseteq V(J)} V(J)$$

Sei $q \in \operatorname{Spec} B$ mit $f^{-1}(I) \subset q$ $\quad$ (d.h. $q \in V(f^{-1}(I))$)

Beh. $\quad q \overset{?}{\in} \overline{Y}$

~~Bew.~~

Sei J so dass $Y \subseteq V(J) = \{r \mid J \subseteq r\}$

z.z. $\quad q \in V(J)$, $\quad$ d.h. $J \subseteq q$

Es gilt: $\quad \underset{\{f^{-1}(p) \mid I \subseteq p\}}{\underset{\parallel}{Y}} \subseteq V(J) \Rightarrow \forall p$ sodass $I \subseteq p$ gilt $f^{-1}(p) \supseteq J$

$\Rightarrow f(J) \subseteq \bigcap_{I \subseteq p} p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vorlesung}}}{=} \sqrt{I} \quad \Rightarrow J \subseteq f^{-1}(\sqrt{I}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gilt allgemein}}}{=} \sqrt{f^{-1}(I)}.$

Aber nach Annahme $f^{-1}(I) \subset q \underset{\substack{q \text{ ist} \\ \text{ein Primideal}}}{\Rightarrow} \sqrt{f^{-1}(I)} \subseteq q.$

Also: $\quad J \subseteq q$ wie gewünscht.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. [9 Punkte]

Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben von abelschen Gruppen auf X und $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein surjektiver Morphismus von Prägarben. Als $\mathcal{F}^+$ und $\mathcal{G}^+$ bezeichnen wir die Garbifizierungen von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Zeige: Es gibt einen surjektiven Morphismus $\mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ von Garben.

$f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ surjektiver Morphismus von Prägarben (d.h. surjektiv auf den Halmen)

universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\theta_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[dl, dashed, "\exists \alpha"] \\ \mathcal{G} \arrow[d, "\theta_{\mathcal{G}}"'] & \\ \mathcal{G}^+ & \end{tikzcd}$$

Garbifizierung : Iso auf den Halmen

surjektiv auf den Halmen

Garbifizierung: Iso auf den Halmen $\Rightarrow$ $\mathcal{F}^+ \xrightarrow{\theta_{\mathcal{G}} \circ \alpha} \mathcal{G}^+$ surjektiv auf den Halmen