



Prof. Dr. Nikita Geldhauser

Wintersemester 2023/24

15.04.2024

Algebraische Geometrie 1

Nachklausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____ Fachsemester: _____

Abschluss: Bachelor, PO 2011 2015 2021 Master, PO 2011 2021

Lehramt Gymnasium: modularisiert nicht modularisiert

Diplom Anderes: _____

Hauptfach: Mathematik Wirtschaftsm. Inf. Phys. Stat. _____

Nebenfach: Mathematik Wirtschaftsm. Inf. Phys. Stat. _____

Anrechnung der Credit Points für das Hauptfach Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studenausweis sichtbar auf den Tisch.

Bitte überprüfen Sie, ob Sie **fünf Aufgaben** erhalten haben.

Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.

Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.

Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	Σ
/13	/9	/9	/10	/9	/50

Name: _____

Aufgabe 1.

[5+8 Punkte]

Seien $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ zwei Polynome. Wir nehmen an, dass die Leitmonome von f und g (bzgl. einer festen Monomordnung) teilerfremd sind.

Schreibe $f = LM(f) + p$ und $g = LM(g) + q$ mit $p, q \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

a) Zeige: $LM(pg) \neq LM(qf)$.

b) Zeige: $\overline{S(f, g)}^{\{f, g\}} = 0$, wobei $S(f, g)$ das S -Polynom von f und g bezeichnet.

Hinweis zu b): Ohne Einschränkung können Sie annehmen, dass die Leitkoeffizienten von f und g gleich 1 sind. Abhängig vom gewählten Lösungsweg ist die Aufgabe a) nützlich.

Name: _____

Aufgabe 2.

[9 Punkte]

Geben Sie ein Beispiel von zwei projektiven Varietäten X und Y über dem Körper \mathbb{C} und von einem Morphismus von projektiven Varietäten $f: X \rightarrow Y$ an, sodass f bijektiv, aber kein Isomorphismus ist. Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Ein solches Beispiel existiert bereits für eindimensionale projektive Varietäten X und Y . Man kann sogar $X = \mathbb{P}^1$ nehmen.

Name: _____

Aufgabe 3.

[9 Punkte]

Berechne das Hilbert-Polynom des homogenen Ideals $J := \langle xz, xw, yz, yw \rangle \triangleleft \mathbb{C}[x, y, z, w]$. Wie sieht $V(J)$ geometrisch in \mathbb{P}^3 aus?

Name: _____

Aufgabe 4.

[10 Punkte]

Seien A und B kommutative Ringe und $f: B \rightarrow A$ ein Ringhomomorphismus.

Sei $f^*: \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$ der induzierte Morphismus mit $f^*(\mathfrak{p}) := f^{-1}(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.

Zeige: Für alle Ideale I von A gilt

$$V(f^{-1}(I)) = \overline{f^*(V(I))},$$

wobei standardmäßig für einen kommutativen Ring R und eine Teilmenge $J \subset R$ die Menge $V(J) \subset \text{Spec } R$ als $\{\mathfrak{q} \in \text{Spec } R \mid J \subset \mathfrak{q}\}$ definiert ist.

Hinweis: Es ist nicht schwer die Inklusion “ \supset ” zu zeigen.

Name: _____

Aufgabe 5.

[9 Punkte]

Seien X ein topologischer Raum, \mathcal{F} und \mathcal{G} Prägarben von abelschen Gruppen auf X und $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein surjektiver Morphismus von Prägarben. Als \mathcal{F}^+ und \mathcal{G}^+ bezeichnen wir die Garbifizierungen von \mathcal{F} und \mathcal{G} .

Zeige: Es gibt einen surjektiven Morphismus $\mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ von Garben.

Name: _____

Name: _____