Übungsblatt 1

13.10.2015

---

1. Sei X eine Banachraum über $\mathbb{K}$, $A, B \in L(X)$ mit $AB = BA$. Zeige:

(a) $e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$ ist absolut konvergent in $L(X)$.
(b) Es gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.
(c) $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} \in L(X)$ ist eine C_0-Gruppe, stetig differenzierbar (als $L(X)$-wertige Funktion), und es gilt $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$ $(t \in \mathbb{R})$.

2. Zeige, dass die Rechtstranslations-Halbgruppe auf $L_\infty(\mathbb{R})$ nicht stark stetig ist.

3. Sei $1 \leq p < \infty$, T die Rechtstranslationshalbgruppe auf $L_p(\mathbb{R})$. Zeige, dass $\|T(t) - I\| = 2$ für alle $t > 0$.

4. Sei $X := C_0(0,1] := \{f \in C(0,1];\ \lim_{x\to 0} f(x) = 0\}$, ausgestattet mit der Supremumnorm. Dann ist X ein Banachraum. Für $t \geq 0$ sei $T(t) \in L(X)$ definiert durch

$$T(t)f(x) := \begin{cases} f(x-t) & , x \in (t,1], \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass T eine stark stetige Halbgruppe ist, und dass $\|T(t)\| = 1$ für $t \in [0,1)$, aber $T(t) = 0$ für $t \geq 1$.

5. Sei X ein Banachraum, T eine C_0-Halbgruppe auf X. Es gebe $t_0 > 0$, so dass $T(t_0)$ invertierbar in $L(X)$ sei. Zeige, dass dann T zu einer stark stetigen Gruppe fortgesetzt werden kann.