Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2021
Blatt 10

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 37. (Vergleich von $\tilde{\exists}_x(x \in T^{\mathrm{nc}} \wedge A)$ und $\exists_{x \in T^{\mathrm{nc}}} A$ für A n.c.). Wir verwenden die arithmetische Form $\forall_x(A \to \mathbf{F}) \to \mathbf{F}$ anstelle der logischen Form $\forall_x(A \to \bot) \to \bot$ des schwachen Existenzquantors (andernfalls gibt es keine Beziehung, da $\bot$ eine Prädikatenvariable mit rechnerischem Gehalt ist). Zeigen Sie

(a) $\exists_{x \in T^{\mathrm{nc}}} A$ impliziert $\tilde{\exists}_x(x \in T^{\mathrm{nc}} \wedge A)$.
(b) $\tilde{\exists}_x(x \in T^{\mathrm{nc}} \wedge A)$ impliziert $\exists_{x \in T^{\mathrm{nc}}} A$, falls A n.c. ist und man für die (nicht-rechnerische) Formel $\exists_{x \in T^{\mathrm{nc}}} A$ folgendes Markov-Axiom annimmt:

$$((\exists_{x \in T^{\mathrm{nc}}} A \to \mathbf{F}) \to \mathbf{F}) \to \exists_{x \in T^{\mathrm{nc}}} A.$$

Aufgabe 38. Die geraden und ungeraden Zahlen seien definiert durch

$$\mathrm{Even} := \mu_X(0 \in X, \forall_n(n \in X \to S(Sn) \in X)),$$
$$\mathrm{Odd} := \mu_X(1 \in X, \forall_n(n \in X \to S(Sn) \in X)).$$

(a) Formulieren Sie das Eliminationsaxiom Odd^-.
(b) Die Verdopplungsfunktion D auf $\mathbb{N}$ sei definiert durch die Berechnungsregeln $D0 = 0$ und $D(Sn) = S(S(Dn))$. Beweisen Sie (aus Odd^-)

$$\forall_n(n \in \mathrm{Odd} \to Dn \in \mathrm{Even})$$

und geben Sie den Herleitungsterm M Ihres Beweises an.
(c) Berechnen Sie den Typ $\tau(\forall_n(n \in \mathrm{Odd} \to Dn \in \mathrm{Even}))$.

Aufgabe 39. Die geraden Zahlen sind induktiv definiert durch

$$0 \in \mathrm{Even}, \qquad \forall_n(n \in \mathrm{Even} \to S(Sn) \in \mathrm{Even}).$$

Beweisen Sie

(a) $\forall_n(S(Sn) \in \mathrm{Even} \to n \in \mathrm{Even})$,
(b) $\forall_n(n \in {}^{\mathrm{co}}\mathrm{Even} \to S(Sn) \in {}^{\mathrm{co}}\mathrm{Even})$.

Abgabe. Mittwoch, 7. Juli 2021.