Mathematisches Institut der LMU
Nils Köpp, Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2021
Blatt 9

Übungen zur Vorlesung „Logik II"

Aufgabe 33. Das Totalitätsprädikat $T_{\mathbb{N}}$ für die Algebra $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist induktiv definiert durch

$$T_{\mathbb{N}} := \mu_{X^c}(0 \in X^c, \forall_n(n \in X^c \to Sn \in X^c)).$$

(a) Formulieren Sie die Einführungsaxiome $(T_{\mathbb{N}})_i^+$ $(i = 0, 1)$ und das Beseitigungsaxiom $T_{\mathbb{N}}^-$.

(b) Beweisen Sie

$$\forall_n(n \in T_{\mathbb{N}} \to \forall_m(m \in T_{\mathbb{N}} \to n + m \in T_{\mathbb{N}})).$$

Aufgabe 34. Die Leibniz-Gleichheit ist induktiv definiert durch

$$\mathrm{EqD} := \mu_{X^{\mathrm{nc}}}(\forall_x X^{\mathrm{nc}} xx) \qquad \text{(D für „induktiv \textbf{d}efiniert")}.$$

Wir schreiben $x \equiv y$ für $\mathrm{EqD}(x, y)$.

(a) Beweisen Sie die Verträglichkeit $\forall_{x,y}(x \equiv y \to A(x) \to A(y))$. (Hinweis: EqD^-).

(b) Beweisen Sie Symmetrie und Transitivität der Leibniz-Gleichheit.

Aufgabe 35. Die Funktion $*\colon \mathbb{L}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \to \mathbb{L}(\mathbb{N})$ sei definiert durch

$$[] * n = n :: [],$$
$$(n :: \ell) * m = n :: (\ell * m).$$

(a) Beweisen Sie $\forall_\ell(T_{\mathbb{L}(\mathbb{N})}\ell \to \forall_n(T_{\mathbb{N}}n \to T_{\mathbb{L}(\mathbb{N})}(\ell * n)))$, wobei

$$T_{\mathbb{L}(\mathbb{N})} := \mu_X(X[], \forall_n(T_{\mathbb{N}}n \to \forall_\ell(X\ell \to X(\ell * n)))),$$
$$T_{\mathbb{N}} := \mu_X(X0, \forall_n(Xn \to X(Sn))).$$

(b) Definieren Sie ein n.c. Prädikat Rev so daß $\mathrm{Rev}(\ell_1, \ell_2)$ bedeutet daß ℓ_2 die Liste ℓ_1 in umgekehrter Reihenfolge ist. Geben Sie $(\mathrm{Rev})_i^+$ $(i = 0, 1)$ und Rev^- an.

(c) Zeigen Sie $\forall_{\ell_1}(T_{\mathbb{L}(\mathbb{N})}\ell_1 \to \exists_{\ell_2}(T_{\mathbb{L}(\mathbb{N})}\ell_2 \wedge \mathrm{Rev}(\ell_1, \ell_2)))$.

Abgabe. Mittwoch, 30. Juni 2021.